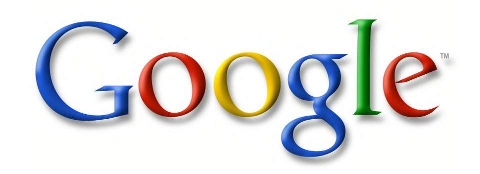
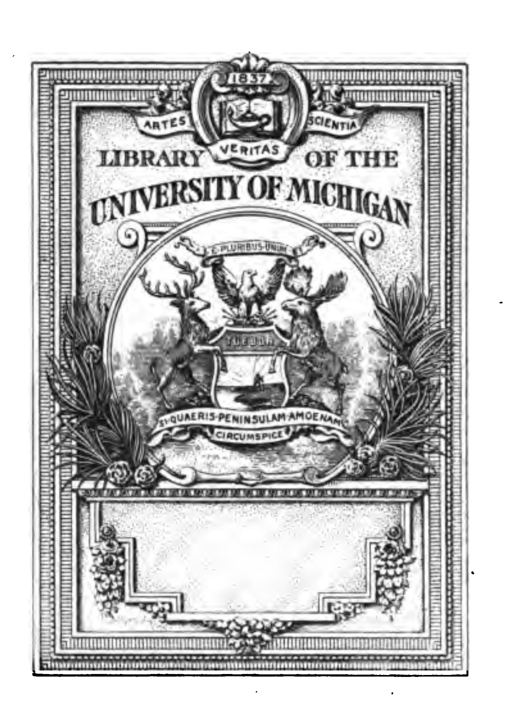

Google


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE
TOME QUATRIÈME
Année 1885.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1885

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES

Par **E. Catalan.**

Ces théorèmes datent de 1848. A cette époque, ils ont été publiés dans un ouvrage lithographié, intitulé : *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, épuisé depuis longtemps. En 1852, afin de *prendre date*, je les ai reproduits, sans démonstration, dans les *Nouvelles Annales* (t. XI, p. 173).

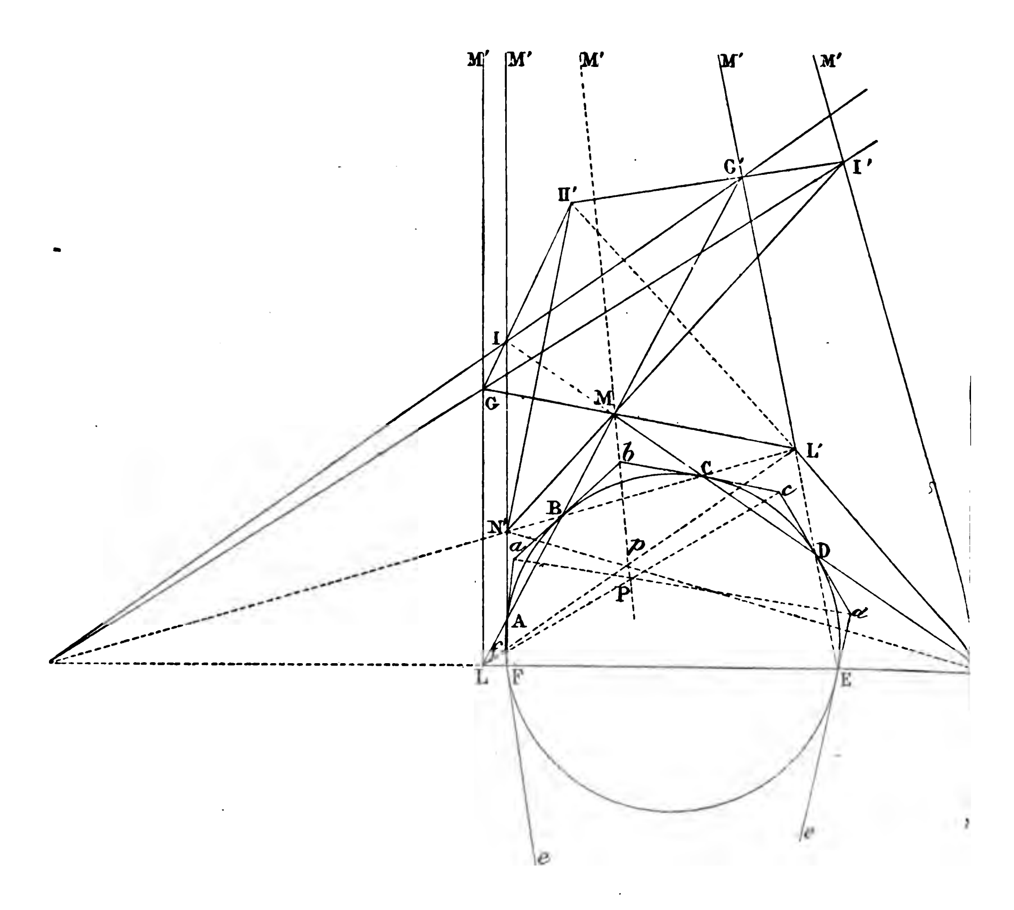
Malgré cette précaution, ils ont été si bien oubliés (même par l'auteur) que M. Folie, mon savant confrère à l'Académie de Belgique, a *réinventé* les deux premiers *(Bulletin de l'Académie*, août 1877, p. 186). Un peu plus tard, M. Folie a spontanément reconnu mes droits (*Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. — Bulletin*, octobre 1878).

Les théorèmes dont il s'agit étant intimement liés à ceux de Pascal et de Brianchon, M. de Longchamps a pensé qu'ils pourraient intéresser les élèves; c'est pourquoi je les publie de nouveau. Puissent-ils en faire découvrir d'autres ! (*)

I. — Soit ABCDEF un hexagone inscrit à une conique C, et dont les côtés se rencontrent en H, G, I. Prolongeons les côtés alternatifs AB, CD, EF : nous obtiendrons un triangle MNL. De même, les côtés BC, DE, FA, prolongés, forment un triangle M'N'L'.

(*) Sauf quelques légères corrections et abréviations, le texte qu'on va lire est conforme au texte primitif.

Les points G, H, I, situés sur une même droite (Th. de Pascal), sont ceux où se coupent les côtés correspondants de ces deux triangles; donc les droites MM', NN', LL' concourent en un même point p (Th. de Desargues); donc aussi, par la réciproque du Théorème de Brianchon, l'hexagone



MM' NN' LL' est circonscriptible à une certaine conique C'. Ainsi :

Théorème I. — *Les intersections successives des côtés*

alternants d'un hexagone de Pascal sont les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon (*).

II. — La réciproque est vraie. Par exemple, les droites MN, L'N', NL,... diagonales de l'hexagone circonscrit ML'NM'LN', forment l'hexagone inscrit ABCDEF. Autrement dit :

Théorème II. — *Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal.*

III. — Par les sommets de l'hexagone ABCDEF, menons des tangentes à la conique C : nous formerons un hexagone circonscrit, *abcdef*. Considérons, avec celui-ci, l'hexagone ML'NM'LN'. Les points *a*, *c* sont, respectivement, les pôles des cordes AB, CD ; donc le point M, où concourent ces cordes, est le pôle de *ac* (**). De même, M' est le pôle de *df*. Donc MM' est la polaire du point de concours, *s*, des droites *ac*, *df*.

Semblablement, NN' est la polaire du point de concours, *t*, des droites *ce*, *bf*; LL' est la polaire du point de concours, *u*, des droites *db*, *ae*. D'ailleurs, MM', NN', LL' concourent en un même point P; donc *les points* s, t, u *sont situés sur une même droite, polaire de* p.

Les diagonales *ac*, *bd* sont, d'après ce qui a été démontré plus haut, les côtés d'un hexagone inscriptible ; et les points *s*, *t*, *u* sont ceux où concourent les côtés opposés de cet hexagone. En conséquence :

Théorème III. — *Lorsque deux hexagones* H, H' *sont l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact*

(*) Comme dans la *Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon* (*Bulletin* décembre 1878), j'adopte, presque textuellement, les énoncés de M. Folie, qui ont le double avantage d'être concis et clairs.

(**) On a omis les droites *ac*, *df*, *be*, pour ne pas trop compliquer la figure.

des côtés du second; l'hexagone de Brianchon, déduit de H (Th. I), *et l'hexagone de Pascal, déduit de* H' (Th. II), *sont polaires réciproquement, relativement à la conique* C.

IV (*). — Voici, je pense, la manière la plus simple de formuler les relations entre les théorèmes de Pascal, de Desargues et de Brianchon :

Dans deux triangles homologiques : 1° les côtés sont ceux d'un hexagone de Pascal ; 2° les sommets sont ceux d'un hexagone de Brianchon.

THÉORÈME D'ALGÈBRE

Par M. **Cretin**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

1. — *Soient* F (x, y, z ...) *et* f (x, y, z ...) *deux fonctions entières, la deuxième étant du premier degré par rapport à chacune des variables séparément. Si* F *s'annule chaque fois que* f *est nul, on a*

$$F = fQ,$$

Q étant un polynôme entier.

La démonstration de ce théorème pour le cas d'une seule variable est très facile et bien connue; il me paraît utile de l'exposer pour un nombre quelconque de variables.

Nous l'admettrons pour les variables y, z ... ; et nous allons faire voir qu'il est encore vrai, si l'on introduit une variable de plus, x. Posons

$$F = A_0x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$
$$f = ax + b,$$

Faisons la division de ces deux polynômes en ordonnant successivement par rapport aux puissances décroissantes et aux puissances croissantes. Nous serons ainsi conduits aux deux égalités :

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, décembre 1878.

$$F = (ax + b)\,Q + \frac{\varphi\,(y,z\,\ldots)}{a^{\alpha}},$$

$$F = (b + ax)\,Q' + \frac{x^{m}\psi\,(y,z\,\ldots)}{b^{\beta}},$$

φ et ψ désignent des fonctions entières, Q et Q', des polynômes entiers en x dont les coefficients rationnels ne peuvent contenir en dénominateurs que des puissances de a, pour Q; et des puissances de b, pour Q'.

Donnons à y, z ... des valeurs telles que a et b soient tous deux différents de zéro. Alors F et f seront des polynômes de la seule variable x; le premier par hypothèse s'annulant pour la racine du second, la division se fait exactement. Par conséquent φ et ψ sont nuls. Il existe donc pour chacune des variables y, z ... une infinité de valeurs telles que substituées dans φ et ψ elles donnent pour résultat o. Donc φ et ψ sont nuls identiquement, et l'on a

$$F = (ax + b)Q, \qquad (1)$$

$$F = (b + ax)Q'. \qquad (2)$$

Il s'agit de prouver maintenant que les coefficients du polynôme Q sont entiers. Le premier de ces coefficients est $\frac{A_0}{a}$. Posons :

$$F = (ax + b)\,\frac{A_0}{a}x^{m-1} + F_1, \qquad (3)$$

F_1 étant le premier reste partiel de la division. J'aurai prouvé que $\frac{A_0}{a}$ est entier en démontrant que A_0 s'annule chaque fois que a est nul. — Considérons donc un système de valeurs de y, z ... annulant a, ce système pourra ne pas annuler b; alors l'égalité (2) montre que F est un polynôme de degré $m-1$, donc $A_0 = 0$. Ce système pourra annuler b, alors $ax + b$ étant nul, quel que soit x, il en sera de même de F, et A_0 sera nul.

Il est donc démontré que $\frac{A_0}{a}$ est entier. Mais l'égalité (3) montre que F_1 s'annule, comme F quand $ax + b$ est nul; donc le premier terme du quotient de F_1 par $ax + b$ aura un coefficient entier, et ainsi de suite.

Le théorème est donc démontré.

2. — J'appliquerai ce théorème à la propriété d'invariance du déterminant d'un système de fonctions linéaires homogènes en nombre égal à celui des variables.

Soit le système des trois fonctions :

$$f = ax + by + cZ,$$
$$f_1 = a'x + b'y + c'Z,$$
$$f_2 = a''x + b''y + c''Z,$$

dont je désignerai le déterminant par d.

Je fais, dans ces fonctions, la substitution :

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$
$$y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma Z,$$
$$z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z,$$

soit δ le déterminant de cette substitution. On a alors les trois fonctions :

$$f = AX + BY + CZ,$$
$$f_1 = A'X + B'Y + C'Z,$$
$$f_2 = A''X + B''Y + C''Z,$$

dont je désignerai le déterminant par D.

D est une fonction des éléments a, b, c..., et α, β, γ,.... Si d est nul, il existe une relation entre les fonctions f vérifiée quels que soient x, y, z et par suite quels que soient X, Y, Z. Donc D est nul. De plus d et D sont du même degré par rapport à a, b, c... On a donc

$$D = dQ,$$

et Q est indépendant de a, b, c, etc.

On trouvera Q, comme l'a remarqué M. Walecki, en prenant le cas particulier :

$$f = x, \quad f_1 = y, \quad f_2 = z.$$

Alors $d = 1$, $D = \delta$. Donc $Q = \delta$ et l'on a

$$D = d\delta.$$

C'est la propriété d'invariance.

3. — Cette démonstration fournit celle de la multiplication des déterminants.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} A &= a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' \\ B &= a\beta + b\beta' + c\beta'' \\ C &= a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' \\ A' &= a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'', \text{ etc.} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha' + c\alpha'', & a\beta + b\beta' + c\beta'', & a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' \\ a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'' \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

C'est la démonstration indiquée dans la première leçon de l'Algèbre de M. Salmon. Le théorème de notre article nous paraît la rendre complètement rigoureuse.

SUR LES TANGENTES

COMMUNES A UN CERCLE ET A UNE PARABOLE

Par M. **Joseph Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

La présente note nous a été suggérée par un théorème intéressant dû à M. Laguerre et démontré par M. Brisse (*). Cette proposition et une foule d'autres du même genre se déduisent, avec la plus grande facilité, d'une même égalité très simple qui est probablement inédite.

1° En exprimant que la perpendiculaire abaissée du centre (α, β) d'un cercle sur une tangente à la parabole est égale au rayon R, on trouve

$$\frac{\beta - m\alpha - \dfrac{p}{2m}}{\pm\sqrt{1 + m^2}} = R, \qquad (1)$$

ou

$$(\alpha^2 - R^2)m^4 - 2\alpha\beta m^3$$
$$+ (p\alpha + \beta^2 - R^2)m^2 - p\beta m + \frac{1}{4}p^2 = 0. \qquad (2)$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1884, p. 388.

Cette équation détermine les coefficients angulaires des tangentes communes aux deux courbes.

On parvient à une équation plus avantageuse en faisant dans la formule (1) les substitutions :

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi},$$

$$\pm\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi};$$

ce qui donne

$$\frac{p}{4}\operatorname{tg}^4\frac{1}{2}\varphi + (R+\beta)\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\varphi + \left(2\alpha - \frac{p}{2}\right)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi$$
$$+ (R-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{p}{4} = 0. \qquad (3)$$

Pour que le premier membre de l'égalité (1) transformée soit positif, il faut prendre pour φ l'angle que fait l'axe des dès x positifs avec la partie de la tangente commune qui s'étend à droite ou avec celle qui s'étend à gauche, suivant que cette ligne est tangente commune intérieure ou tangente commune extérieure; d'ailleurs, cet angle doit être compté, comme à l'ordinaire, à partir des x positifs vers les y positifs. Cette convention donne à $\cos\varphi$ le signe qu'il faut attribuer au radical $\sqrt{1+m^2}$. Il importe de remarquer que deux cercles situés de part et d'autre d'une tangente à la parabole correspondent à deux valeurs de φ qui diffèrent de π, ou à deux valeurs de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ qui sont réciproques et de signes contraires.

Les quatre racines de (3) ne dépendent que de trois quantités variables, α, β, R; par suite, il doit exister entre elles une relation. Celle-ci est visiblement

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 = 1. \qquad (4)$$

Telle est la condition *nécessaire* et *suffisante* pour que

quatre tangentes à la parabole enveloppent une même circonférence

2° Désignons par C, C', C'', C''', les quatre cercles qui touchent trois tangentes déterminées T_1, T_2, T_3, menées à la parabole, et soient T_4, T'_4, T''_4, T'''_4, les autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à la parabole. Les *paramètres* de T_1, T_2, T_3 sont représentés, respectivement, par

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

$$-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \quad -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2, \quad -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

suivant que ces droites sont considérées avec C, C', C'' ou C'''; par suite, ceux de T_4, T'_4, T''_4, T'''_4, en vertu de la relation (4), sont

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'_4 = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi''_4 = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'''_4 = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3.$$

On voit immédiatement que

$$\left(-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_4\right)\operatorname{tg}\frac{}{2}\varphi'_4 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi''_4 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'''_4 = 1,$$

$$\left(-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi'_4\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 = 1.$$

Ces égalités ont la même forme que (4). La première indique donc que les droites T_4, T'_4, T''_4, T'''_4 enveloppent un même cercle; de la seconde on conclut qu'il existe un cercle touchant T_4, T'_4 et T_1, le point de contact de T_1 étant le même que celui de la parabole.

D'après cela, on a le théorème suivant :

Étant donnés les quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle et une parabole quelconque inscrite au même triangle : 1° les autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à la parabole enveloppent un même cercle ; 2° deux de ces tangentes et le côté du triangle donné qui touche différemment les cercles correspondant à ces tangentes forment un triangle tel que l'un des cercles inscrits touche ledit côté au même point que la parabole. *(A suivre.)*

PROPRIÉTÉS
DE
L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS
ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

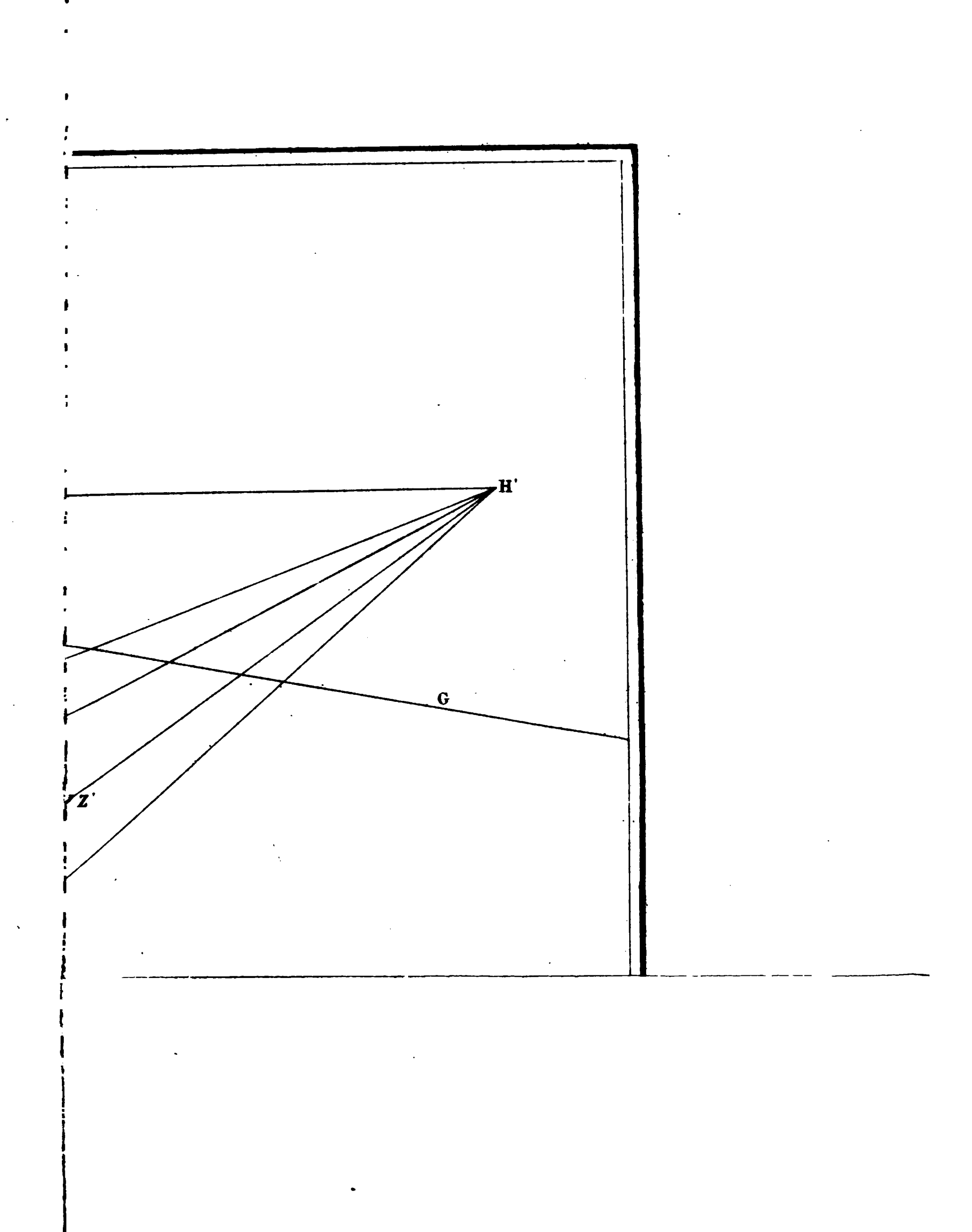
Nota. — Pour faciliter la lecture de la note de M. Brocard, nous rappelons ici les notations employées par ce géomètre dans ses précédents mémoires.

Le triangle donné est désigné par ABC ; la circonférence circonscrite à ce triangle a pour centre H, et RDHN pour un de ses diamètres.

Parmi les points remarquables associés au triangle, il y a lieu de signaler le centre de gravité E ; le point H' de rencontre des hauteurs, ou orthocentre ; le centre des médianes antiparallèles K, ou point de Lemoine ; les points O, O', ou points de Brocard, définis par les angles égaux (OAB, OBC, OCA), (O'AC, O'BA, O'CB) donnés par la relation

$$\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C;$$

les points A_1, B_1, C_1 d'intersection des droites (OB, O'C) (OC, O'A) (OA, O'B) ; le point S milieu de OO', situé sur HK diamètre du cercle de Brocard ; Z milieu de HK, centre de ce cercle ; D' pôle de la corde OO' ; D centre d'homologie des triangles semblables ABC, $A_1B_1C_1$.


H'
G
Z'

Les relations de ces divers points sont assez connues pour avoir été étudiées ou indiquées dans les précédents articles du Journal relatifs aux nouvelles propriétés du triangle.

Les couples de points (HH′) (EK) (ZZ′) (SS′) (OO′) (DD′) correspondent entre eux, par une transformation par droites symétriques.

La conique transformée de la droite HK est alors une hyperbole équilatère passant par neuf points remarquables A, B, C, H′, D, E, S′, Z′, N.

Enfin, la droite HD est perpendiculaire à la droite GG, axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$.

Quant aux points J, Y, ils se trouvent respectivement sur les droites (HEH′, DD′, SS′), (EK, ZZ′, SS′).

Le présent numéro renferme d'ailleurs la gravure qui correspond aux notations que nous venons de rappeler et qui est gracieusement offerte par l'auteur à nos abonnés.

(G. L.)

1. — J'ai fait connaître dans une notice insérée au *Journal de Mathématiques spéciales* (1884, p. 197-209), la construction et quelques propriétés d'une hyperbole équilatère (Γ) circonscrite et associée au triangle ABC, et qui passe par le centre de gravité et par cinq autres points remarquables du plan.

On peut observer que cette conique se présente dans les conditions suivantes :

Elle est circonscrite au trapèze DEZ′H′ dont les deux bases DH′, EZ′ sont parallèles à HK. (Voir *loc. cit.*, p. 202.)

Son centre W est à l'intersection de la ligne H′D avec la droite f_1f_2 qui joint les milieux des deux bases de trapèze (*).

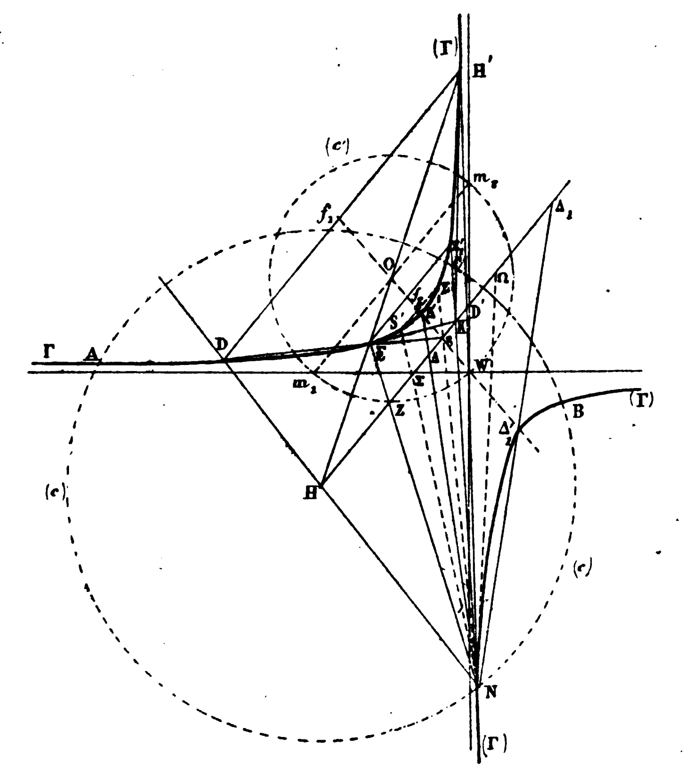
Par définition le centre O du cercle (C′) est au milieu de la ligne HH′ ou au tiers de la ligne EH′. Mais, d'un autre

(*) Il est intéressant de rappeler que les droites rectangulaires Wm_1, Wm_2 asymptotes de l'hyperbole équilatère (Γ) sont les droites de Simson correspondant aux deux extrémités du diamètre du cercle circonscrit passant par le point K. On sait en effet que les droites de Simson deviennent rectangulaires, quand elles corespondent aux extrémités d'un diamètre.

côté, les coordonnées trilinéaires des points D, O et Z' vérifient la relation

$$\frac{D - O}{O - Z'} = \frac{3[n^4p^4 + 3n^4b^2c^2 - 2p^4b^2c^2 - n^4a^4 - n^8]}{n^4p^4 + 3n^4b^2c^2 - 2p^4b^2c^2 - n^4a^4 - n^8} = 3,$$

ce qui prouve que le point O est sur DZ' et divise ce segment de la même manière que EH (*).



Ainsi le centre O du cercle (C') des neuf points est à l'intersection des diagonales du trapèze DEZ'H'.

(*) Dans tout ce qui suivra, nous adopterons les notations abréviatives déjà proposées :

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad n^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2, \quad p^4 = a^4 + b^4 + c^4,$$
$$2P = a + b + c.$$

(Voir, pour cette dernière, *Nouvelles Annales*, t. IX, 1870, p. 377.)

La direction f_1f_2 est conjuguée à celle des cordes parallèles DH', EZ' de l'hyperbole (Γ). f_1f_2 passe donc par le point S et par le centre W de cette conique. En outre, $2f_2S = f_1f_2$ (et f_1f_2 est parallèle à HD).

On vérifierait facilement que f_1f_2 passe aussi par le point O. En effet, l'on a

$$f_{1a} = \frac{S}{a} \cdot \frac{4n^4b^2c^2 + 2a^4n^4 - p^4b^2c^2 - p^4n^4}{n^4(2n^4 - p^4)}$$

$$f_{2a} = \frac{S}{3a} \cdot \frac{4n^8 - 3p^4n^4 + 2n^4a^4 + p^4b^2c^2}{n^4(2n^4 - p^4)}$$

$$O_a = \frac{S}{a} \cdot \frac{n^4 + a^4 + b^2c^2 - p^4}{2n^4 - p^4}$$

$$\frac{f_1 - O}{O - f_2} = \frac{3(3n^4b^2c^2 + n^4a^4 - n^8 - p^4b^2c^2)}{3n^4b^2c^2 + n^4a^4 - n^8 - p^4b^2c^2} = 3.$$

Ce qui établit la proposition.

Ainsi le point O, milieu de HH', se trouve aussi sur les droites f_1f_2S et DZ'. En d'autres termes, DH' = 2HS, et le milieu du côté Sf_1 du parallélogramme $HDSf_1$ est le centre O du cercle (C'). *(A suivre.)*

NOTE SUR LA TRANSFORMATION RÉCIPROQUE
DE M. DE LONGCHAMPS (*)

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

I. — Nous avons démontré dans notre Note *sur l'enveloppe de certaines droites variables* (**) le théorème suivant (p. 256).

Si un segment de droite AA', *dont les extrémités décrivent respectivement les courbes* f *et* F, *est vu d'un point fixe* O' *sous un angle constant, que* O *soit le point où* AA' *touche son enveloppe, et* T *le point de rencontre des tangentes aux courbes* f *et*

(*) Voyez *Journal de Mathématiques spéciales* (1882, p. 49). Les lettres qui sont employées dans cette note se rapportent à la figure 5 (*loc. cit.*, p. 97).

(**) *Nouv. Ann. de Math.* (1883, 3e série, t. II, p. 252). — Cette note comprend une suite qui n'est pas encore publiée, mais qui, je l'espère, le sera prochainement.

F *respectivement en* A *et* A′, *les droites* O′O *et* O′T *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* AO′A′.

Si l'on suppose que l'enveloppe de AA′ se réduise à un point O et que l'angle AO′A′ soit droit, on tombe sur la *transformation réciproque* de M. de Longchamps. On peut donc dire, pour cette transformation, que

Les tangentes en deux points correspondants A *et* A′ *des courbes réciproques* f *et* F *se coupent sur la droite symétrique de l'axe des pôles* OO′ *par rapport à la bissectrice de l'angle* AO′A′.

Ce théorème fournit un moyen simple de construire l'une de ces tangentes quand on connaît l'autre.

II. — Si la courbe f est un cercle de centre O′, la courbe F est la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire (*).

Dans ce cas, la tangente AT est perpendiculaire à O′A. Or, si la perpendiculaire élevée en O′ à OO′ coupe AT en H, on a

$$AO'H = A'O'O,$$

ces angles ayant leurs côtés perpendiculaires. Par suite, d'après le théorème précédent,

$$AO'H = TO'A.$$

Ainsi, les triangles rectangles O′AH, O′AT sont égaux et l'on a

$$AH = AT.$$

On trouve ainsi la construction indiquée par Poncelet (Voir Mannheim, *Cours de géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, p. 366).

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. G. de Longchamps.

La démonstration de M. Walecki sur le théorème fondamental de la théorie des équations : *Toute équation algébrique a une racine*, a profondément troublé l'ordre qui, jusque dans

(*) *Journal* (loc. cit., p. 100).

ces dernières années, présidait au développement des propositions successives de ce grand chapitre de l'algèbre. Nous l'avons introduite dans notre traité d'algèbre, récemment publié; mais nous avons été un peu surpris (l'ouvrage étant écrit et presque entièrement composé) par l'apparition de cette importante démonstration. Il en est résulté, pour cette partie de notre algèbre, une confusion, au moins apparente. Notre attention a été attirée sur ce point par les observations de plusieurs de nos collègues et aussi par une analyse critique qui vient de paraître en Belgique (*).

Voici, dans ce travail (**), le passage qui vise la démonstration de M. Walecki.

Suivant l'usage, l'auteur débute par la démonstration du théorème fondamental : toute équation a une racine, théorème que l'on appelle, en France, *théorème de d'Alembert*, parce que celui-ci s'est attribué assez naïvement le mérite de l'avoir démontré le premier, en 1746. En réalité, la démonstration de d'Alembert est loin d'être rigoureuse, et il en est de même de celles de Foncenex, d'Euler, de Lagrange et de Laplace, analysées dans les *notes IX et X* de la *Résolution des équations numériques* de Lagrange. C'est Gauss qui le premier, en 1799, puis en 1815 et 1816, a démontré le principe fondamental de l'analyse algébrique et, en bonne justice, on devrait lui donner son nom. La démonstration d'Argand (1806), que Legendre a fait connaître en 1808 en la défigurant et sans en signaler l'auteur, et que Cauchy a améliorée en rendant justice à Argand, n'a été rendue irréprochable qu'en 1877, par M. Lipschitz. La quatrième démonstration de Gauss (1849) est une traduction analytique de celle de 1799. Celle de Cauchy (théorème sur le nombre des points racines dans un contour donné) date de 1831, celle de M. Dutordoir de 1883.

Toutes ces démonstrations contiennent des raisonnements trop subtils ou des calculs trop longs, ou enfin s'appuient sur des théorèmes de calcul intégral trop peu élémentaires pour que l'on puisse les introduire dans les cours d'algèbre des lycées. En 1883, M. Walecki est parvenu à trouver une démonstration vraiment simple du théorème en question, et M. de Longchamps a eu la bonne idée de l'introduire immédiatement dans son livre, avant même que M. Walecki l'eut fait connaître tout au long, dans la livraison de juin 1883 des *Nouvelles Annales de mathématiques*. Malheureusement il n'a pu, pressé par le temps, modifier l'ordre traditionnel des divers chapitres de la théorie des équations. C'est un petit inconvénient qu'il est facile de faire disparaître, en disposant les diverses leçons comme nous allons l'indiquer.

(*) *Analyse critique de l'algèbre de M. G. de Longchamps*, par P. Mansion, professeur à l'université de Gand. — (*Revue des questions scientifiques*, octobre 1884, pp. 559-573.)

(**) Qu'il nous soit permis de profiter de l'occasion qui s'offre à nous, ici, pour remercier M. P. Mansion de l'étude si attentive et si complète qu'il a faite de notre traité d'algèbre; nous comptons bien tirer profit de plusieurs de ses critiques pour améliorer, par certains points, la future édition de cet ouvrage.

L'ordre que M. Mansion veut bien nous tracer dans la note citée, est, en effet, pris dans son ensemble, celui qui doit être adopté quand on veut exposer la théorie des équations en passant par la démonstration de M. Walecki. Mais, pour éviter toute confusion, et toute apparence de cercle vicieux, il est peut-être utile de préciser, comme nous nous proposons de le faire ici, l'exacte succession des propositions qui se présentent à l'entrée de la théorie des équations.

Dans l'ordre d'idées que soulève la démonstration en question, le titre de la première leçon de la théorie des équations nous paraît être LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE ET LE RÉSULTANT et cette leçon peut être développée dans la forme suivante.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

1. Définition. — On dit que deux polynômes entiers U et V, fonctions de la lettre x, sont premiers entre eux lorsqu'ils n'admettent aucun diviseur commun, fonction de x.

Théorème I. — *Lorsque deux polynômes entiers* U *et* V : *le premier du degré* p, *l'autre du degré* q, *sont premiers entre eux, on peut trouver deux autres polynômes* μ, ν, *tels que l'on ait*

$$\mu U + \nu V = 1,$$

μ *étant du degré* (q — 1), *et* ν *du degré* (p — 1), *tout au plus.*

Supposons, pour fixer les idées, $p \geq q$, et divisons U par V. Nous serons ainsi conduits à l'identité

$$U = VQ_1 + R_1.$$

D'ailleurs, la division que nous venons d'imaginer ne peut se faire exactement, U et V étant premiers entre eux.

Divisons maintenant V par R_1, nous aurons

$$V = R_1Q_2 + R_2,$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant la suite

$$U, V, R_1, R_2, \ldots \quad (1)$$

formée par des polynômes dont les degrés vont constamment en diminuant, et observons d'abord que les divisions suc-

cessives que nous venons d'imaginer ne peuvent pas aboutir à une division se faisant exactement.

En effet, si deux restes successifs de la suite (1) : R_{k-2}, R_{k-1}, divisés l'un par l'autre, donnaient un reste nul, l'identité

$$R_{k-3} = R_{k-2} Q_{k-1} + R_{k-1},$$

précédemment obtenue, prouverait que R_{k-3} serait, lui aussi, exactement divisible par R_{k-1}. En remontant ainsi, de proche en proche, dans la suite (1), on arriverait à cette conséquence, contraire à l'hypothèse que nous avons faite, que U et V admettraient un diviseur commun R_{k-1}.

Ainsi, la suite (1) est formée par des polynômes entiers dont les degrés vont sans cesse en diminuant; d'ailleurs, ils sont obtenus par des divisions successives qui ne se font jamais exactement. On aboutit donc à un dernier terme R_k représentant une constante *différente de zéro* et ces calculs donnent lieu au tableau suivant :

$$U = VQ_1 + R_1,$$
$$V = R_1 Q_2, + R_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{k-2} = R_{k-1} Q_k + R_k.$$

La première de ces égalités donne, pour R_1, la forme algébrique $U - VQ_1$. En portant cette expression dans la seconde égalité, on voit que R_2, puis R_3, etc., peuvent s'écrire identiquement sous la forme algébrique $\alpha U + \beta V$; α et β étant des polynômes entiers. Cette observation s'appliquant à R_k, on a donc

$$R_k = \alpha U + \beta V.$$

En divisant par R_k, qui n'est pas nul, et en posant

$$\mu = \frac{\alpha}{R_k}, \quad \nu = \frac{\beta}{R_k},$$

on trouve

$$\mu U + \nu V = 1. \qquad (A)$$

Si l'on suivait avec attention la formation des facteurs α, β, dans l'expression des restes R_1, R_2... sous la forme $\alpha U + \beta V$, on verrait, mais non sans un certain effort, que la méthode que nous venons d'exposer et qui conduit à l'identité (A), donne bien, conformément à l'énoncé, des

facteurs μ, ν, dont les degrés respectifs sont, tout au plus, $q - 1$ et $p - 1$.

Mais on peut éviter, sinon ces difficultés, du moins ces explications un peu longues et fixer complètement la démonstration, par la remarque suivante.

Si l'on suppose que μ et ν n'aient pas, comme le veut l'énoncé de la proposition en question, des degrés respectifs, égaux ou inférieurs aux nombres $q - 1$ et $p - 1$, alors, on peut diviser μ et ν, respectivement par V et U, et l'on a

$$\mu \equiv V\lambda + \mu', \qquad (2)$$
$$\nu \equiv U\lambda' + \nu'. \qquad (3)$$

D'après cela, l'identité (A) peut s'écrire

$$UV(\lambda + \lambda') + \mu'U + \nu'V \equiv 1.$$

Dans cette identité, la partie $UV(\lambda + \lambda')$ renferme les termes d'un degré supérieur à tous les autres et au moins égal à $p + q$, si l'on ne suppose pas $\lambda + \lambda' \equiv 0$. Or la présence de ce terme ne peut être admise, l'autre partie : $\mu'U + \nu'V - 1$ n'ayant, pour des raisons évidentes, que des termes dont le degré est, tout au plus, égal à $p + q - 1$.

Ainsi l'on doit supposer

$$\lambda + \lambda' \equiv 0,$$

et l'on a, d'après cela,

$$\mu'U + \nu'V \equiv 1;$$

μ' et ν' ayant, vu les identités (2) et (3), des degrés respectivement égaux ou inférieurs à $q - 1$ et à $p - 1$.

Remarque. — La réciproque de la proposition fondamentale que nous venons d'établir est évidente. Si l'on a

$$\mu U + \nu V \equiv 1,$$

U et V sont deux polynômes premiers entre eux. En effet, si l'on avait $U \equiv U_1D$, $V \equiv V_1D$, on aurait donc

$$D(\mu U_1 + \nu V_1) \equiv 1,$$

inégalité manifestement impossible, si D n'est pas une constante. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Amigues, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

Dans les cours de mathématiques spéciales, on donne le théorème suivant :

Si a *et* b *sont deux racines réelles consécutives de l'équation* $f'(x) = 0$, *et si la fonction* $f(x)$ *et sa dérivée sont continues de* a *à* b, *l'équation* $f(x) = 0$ *admet au plus une racine réelle, comprise entre* a *et* b.

Ce théorème est connu sous le nom de *réciproque du théorème de Rolle*, et sa démonstration se déduit en effet de ce dernier.

Il est exact, bien entendu. Mais il a de nombreux défauts.

1° Son application suppose que les racines de la dérivée sont connues.

2° Il laisse entendre qu'il faut s'arrêter à toutes les racines réelles de la dérivée, tandis qu'on peut négliger les racines paires.

3° Il suppose, par la démonstration adoptée, que la dérivée reste continue entre a et b.

J'ai toujours donné, de préférence, le théorème suivant.

La fonction $f(x)$ *étant continue entre deux nombres quelconques* a *et* b, *la dérivée ne changeant pas de signe dans cet intervalle, l'équation* $f(x) = 0$ *admet, au plus, une racine réelle entre* a *et* b.

En effet, de a à b, la fonction est toujours croissante ou toujours décroissante, et par suite ne peut être nulle qu'une fois.

Pour l'application, les valeurs importantes sont : 1° celles qui rendent la fonction $f(x)$ discontinue ; 2° celles qui rendent la dérivée infinie et la font en outre changer de signe ; 3° les racines impaires de l'équation $f'(x) = 0$. Mais toutes ces valeurs ne sont nécessaires que pour faire une étude complète, et le théorème ci-dessus peut être utile dans d'autres conditions.

Il est bon d'observer que la racine unique, comprise entre a et b, peut être multiple ; mais, en ce cas, elle est d'ordre impair, en définissant, comme d'habitude, les racines paires

et impaires des équations qui ne sont pas algébriques et entières.

Enfin, les nombres tels que a et b peuvent être racines de l'équation $f(x) = 0$, indépendamment de la racine qui peut être comprise entre a et b.

QUESTIONS D'EXAMENS (*)

1. — *Résoudre l'équation*

$$x^6 + 1 = 0.$$

On observe que l'on a

$$(x^6 + 1) = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1),$$

ou

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1).$$

Les six racines de l'équation sont, d'après cette remarque,

$$x_1 = i, \quad x_2 = -i; \quad x_3 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{3} - i}{2};$$

$$x_5 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad x_6 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}.$$

2. — *Résoudre l'équation*

$$x^6 - 1 = 0. \qquad (1)$$

(*) Sous ce titre, nous ferons paraître dans ce journal, d'une façon continue, des questions offrant un intérêt particulier pour les élèves de mathématiques spéciales.

Les exercices que nous proposons ici, ceux que nous donnerons ensuite, dans les mêmes conditions, n'offrent pas assez de difficultés pour qu'il soit utile de présenter leur solution avec tous les détails qu'elle peut comporter. Une indication rapide sur la marche que l'on peut adopter, un renseignement sur le résultat auquel il faut aboutir, suffisent, dans ces problèmes simples, à provoquer immédiatement la solution et à vérifier celle-ci.

Le plus souvent, ces exercices seront choisis dans les questions posées aux examens oraux de l'Ecole Polytechnique. Nous y ajouterons aussi quelques sujets d'un genre analogue, et toujours dans les conditions que nous venons de préciser ; mais ceux-ci, pour les distinguer des précédents, seront accompagnés d'un astérisque.

Nous dirons, à ce propos, combien nous recevrons avec reconnaissance le signalement des inexactitudes qui pourraient nous échapper dans l'indication des solutions et des résultats; et, pareillement, celui des fautes typographiques. Ces errata divers, que nous nous efforcerons de rendre aussi rares qu'il nous sera possible, seront publiés, dans le numéro de décembre, en même temps que la table des matières. G. L.

L'identité

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1),$$

peut s'écrire encore,

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

On déduit de cette décomposition les six racines de l'équation (1) proposée.

On peut observer que ces deux questions rentrent l'une dans l'autre, en posant

$$x = i\mathrm{X}.$$

3. — *Soient* a, b, c *les trois racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0.$$

On propose de calculer U,

$$U = \Sigma \frac{a^2}{(b+1)(c+1)}.$$

On peut observer d'abord que

$$(a+1)(b+1)(c+1) = p + 1 - q;$$

d'après cela, on a

$$\frac{a^2}{(b+1)(c+1)} = \frac{a^2(a+1)}{p+1-q}.$$

On trouve, finalement,

$$U = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2}{p + 1 - q}.$$

Le résultat cherché est donné par la formule

$$U = \frac{2p + 3q}{q - p - 1}.$$

4. — *Reconnaître que l'unité est une racine double de l'équation*

$$(n-1)(x^n + 1) - 2x(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1) = 0. \quad (1)$$

Cette équation est visiblement vérifiée par $x = 1$, et l'on peut démontrer facilement qu'en divisant le premier membre par $x^2 - 2x + 1$, on est conduit à un quotient exact.

Il est plus simple d'observer, qu'en introduisant *une fois* la racine $x = 1$, on a

$$(n-1)(x^n + 1)(x - 1) - 2x(x^{n-1} - 1) = 0. \quad (2)$$

En prenant *deux fois* la dérivée du premier membre de cette équation, on trouve :

$$(n^2 - 1)x^{n-2}(x - 1) = 0.$$

Cette dernière égalité prouve que $x = 1$, est une racine double de l'équation proposée.

On peut aussi, bien entendu, vérifier la propriété énoncée en constatant directement, 1° que $x = 1$ est une racine de l'équation (1); 2° que $x = 1$ est une racine simple de l'équation dérivée.

La forme (2) permet d'étudier l'équation donnée au point de vue de la réalité de ses racines. Le théorème des lacunes trouve ici une application évidente. *(A suivre.)*

NOTA. — Nous avons reçu des solutions :

De la question 88, par M. Hugon, à Poligny;

De la question 94, par MM. Bèche, professeur à l'école normale de Tulle; Taratte, élève au lycée Saint-Louis; H. Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay); Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) :

De la question 76, par M. Ed. Simonot, élève à la faculté libre de Lyon;

De la question 89, par M. Giat;

De la question 97, par MM. Fervalle; Taratte. (La solution de M. Taratte est purement géométrique et d'une grande élégance).

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous adressent doivent porter en tête :

Le numéro de la question;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient;

L'énoncé complet et souligné de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures, celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées, et en n'écrivant que d'un seul côté, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions, sans aucun avis d'envoi, peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1376-5.

SUR LES TANGENTES

COMMUNES A UN CERCLE ET A UNE PARABOLE

Par M. **Joseph Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite*, voir p. 9.)

3° Lorsque trois des tangentes communes à deux coniques coïncident, les deux courbes ont entre elles un contact du deuxième ordre sur cette tangente. Donc si $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1$ est le paramètre de la tangente T_1 au point de contact de la parabole et d'un cercle osculateur, et que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2$ soit celui de la seconde tangente T_2 commune à ces courbes, on a la relation

$$\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = 1, \text{ ou } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 = \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2},$$

qui détermine trois valeurs de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1$ (dont deux imaginaires), lorsque $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2$ est donné. Soient $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1'$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1''$ ces valeurs; on trouve aisément

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1' \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1'' \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = 1.$$

Ainsi *on peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe; cette tangente et les tangentes au point d'osculation touchent un même cercle.* (Laguerre.)

Pour préciser la position de ce cercle, il suffit d'identifier l'équation (3) avec la suivante :

$$\left(\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\varphi - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2\right)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2\right) = 0,$$

qui a pour racines

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1,\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1',\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1'',\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2.$$

On trouve ainsi

$$R+\beta=\frac{p}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2,\quad \alpha=\frac{p}{4},\quad R-\beta=\frac{p}{4}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2,$$

$$R^2-\beta^2=\frac{p^2}{16}=\alpha^2,\qquad \alpha^2+\beta^2-R^2=0;$$

d'où l'on conclut que *le cercle passe par le sommet et par le foyer de la parabole.*

4° Pour abréger le langage, nous appellerons maintenant *concycliques* quatre tangentes à un cercle.

Le théorème suivant, dont la démonstration résulte immédiatement de ce qui précède, a quelque analogie avec celui de M. Laguerre :

Étant donnée une parabole : 1° les quatre tangentes aux points d'osculation des cercles osculateurs qui touchent quatre tangentes concycliques à la parabole sont également concycliques ; 2° réciproquement, si l'on construit les cercles osculateurs aux points de contact de quatre tangentes concycliques, les autres tangentes communes à ces cercles et à la parabole sont encore concycliques.

5° La condition pour que quatre tangentes à la parabole soient concycliques étant mise sous la forme

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2\left(-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3\right)\left(-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4\right)=1,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

Si quatre tangentes à la parabole sont concycliques, deux de ces lignes et les symétriques des deux autres par rapport à l'axe de la parabole sont également concycliques.

Voici encore une autre proposition assez curieuse :

Si l'on inscrit deux cercles dans un même angle circonscrit à une parabole, les quatre autres tangentes communes aux deux cercles et à la parabole enveloppent un même cercle.

En effet, par hypothèse, on a deux relations de la forme

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3'\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4'=1;$$

il en résulte :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4\left(-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3'\right)\left(-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_4'\right)=1.$$

Lorsqu'un cercle touche la parabole, deux des tangentes communes coïncident, et la relation (4) devient

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi_3 = 1.$$

Elle détermine deux valeurs de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3$ égales et de signes contraires, et le produit de ces valeurs, multiplié par $\left(-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2$ est égal à l'unité. Par conséquent :

Étant données deux tangentes à la parabole, on peut décrire deux cercles qui touchent ces droites et la courbe; les points où ils touchent la parabole sont symétriques par rapport à l'axe; les tangentes en ces points, l'une des tangentes données et la symétrique de l'autre par rapport à l'axe forment un système concyclique.

6° Si l'on considère la suite des cercles inscrits entre deux tangentes déterminées T_1, T_2 à la parabole, on peut se proposer de déterminer le lieu du point d'intersection M des deux autres tangentes T_3, T_4 menées à l'un de ces cercles et à la parabole.

Cela revient à chercher le lieu des points M tels que les tangentes T_3, T_4 menées de M à la parabole vérifient l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 = K, \quad (5)$$

K étant une constante.

Les deux cercles qui touchent les droites T_3, T_4 et la parabole, touchent celle-ci en deux points fixes N, N'; car le paramètre de la tangente menée en N ou N' se détermine par l'équation

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 = 1.$$

Le problème énoncé ci-dessus est donc identique à une question célèbre posée par Chasles à un concours général de France :

Un cercle variable touche une conique donnée en un point fixe; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes à ce cercle et à la conique.

Traitons le problème par le calcul. Les paramètres des tan-

gentes issues du point $M(\alpha, \beta)$ sont les racines de l'équation (3), dans laquelle on fait $R = 0$; ils vérifient donc l'égalité

$$\frac{p}{4}\,\mathrm{tg}^4\frac{1}{2}\varphi + \beta\,\mathrm{tg}^3\frac{1}{2}\varphi + \left(2\alpha - \frac{p}{2}\right)\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\varphi$$
$$- \beta\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{p}{4} = 0.$$

On constate facilement que les solutions de celle-ci sont, deux à deux, réciproques et de signes contraires, circonstance dont l'explication n'est pas difficile. L'équation précédente est donc de la forme

$$\left[\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\varphi - \left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 - \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3}\right)\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi - 1\right]$$
$$\left[\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\varphi - \left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 - \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4}\right)\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi - 1\right] = 0.$$

En identifiant et en tenant compte de la condition (5), on trouve

$$-\frac{4\beta}{p} = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 - \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3} - \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{K}\right)\left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4\right),$$

$$\frac{8\alpha - 2p}{p} = K + \frac{1}{K} - \frac{\left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4\right)^2}{K}.$$

Il reste à éliminer $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi_4$ entre ces égalités. Le lieu est une parabole homofocale à la proposée.

On peut aussi rattacher la solution du problème que nous venons de résoudre, à l'équation (2). A cet effet, cherchons la condition nécessaire pour que les tangentes menées de deux points $M(x, y)$ et $N(x_1, y_1)$ soient concycliques. Les coefficients angulaires de ces droites sont les racines de

$$\left(m^2x - my + \frac{p}{2}\right)\left(m^2x_1 - my_1 + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

En identifiant cette équation avec (2), on trouve

$$\alpha^2 - R^2 = xx_1, \qquad 2\alpha\beta = xy_1 + x_1y,$$

$$p\alpha + \beta^2 - R^2 = yy_1 + \frac{p}{2}(x + x_1), \quad \beta = \frac{y + y_1}{2}.$$

Entre ces égalités, il faut éliminer α, β, R. On a d'abord

$$\beta = \frac{y + y_1}{2}, \qquad \alpha = \frac{xy_1 + x_1y}{y + y_1},$$

$$R^2 = \alpha^2 - xx_1 = \frac{(x - x_1)(xy_1^2 - x_1y^2)}{(y + y_1)^2},$$

$$\beta^2 - yy_1 = \frac{(y - y_1)^2}{4};$$

par suite, la relation cherchée est

$$p\,\frac{xy_1 + x_1y}{y + y_1} + \frac{(y - y_1)^2}{4} - \frac{(x - x_1)\,(xy_1^2 - x_1y^2)}{(y + y_1)^2}$$
$$- \frac{p}{2}(x + x_1) = 0,$$

ou

$$(y^2 - y_1^2)^2 - 2p(x - x_1)(y^2 - y_1^2) - 4(x - x_1)(xy_1^2 - x_1y^2) = 0.$$

En observant que

$$xy_1^2 - x_1y^2 = (x - x_1)y_1^2 - x_1(y^2 - y_1^2),$$

on peut lui donner la forme

$$(y^2 - y_1^2)^2 + 4(x - x_1)(x_1 - \frac{1}{2}p)(y^2 - y_1^2) - 4y_1^2(x - x_1)^2 = 0;$$

d'où l'on déduit

$$y^2 - y_1^2 = -2(x - x_1)(x_1 - \frac{1}{2}p)$$
$$\pm 2(x - x_1)\sqrt{y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}p)^2}. \qquad (6)$$

Si l'on suppose le point N fixe, le point M décrit deux paraboles qui correspondent, respectivement, aux deux suites de cercles touchant les tangentes menées du point fixe. L'équation (6), après quelques transformations faciles, devient

$$y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2 = \left[x - x_1 \pm \sqrt{y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}p)^2}\right]^2$$

et montre que les paraboles du lieu sont homofocales à la parabole donnée et passent par le point (x_1, y_1).

(A suivre.)

PROPRIÉTÉS
DE
L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS
ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. H. Brocard.

(*Suite*, voir p. 12.)

2. — L'équation de l'hyperbole (Γ) peut s'obtenir aisément (*).

Cette conique est circonscrite au triangle. Son équation est donc de la forme

$$L\beta\gamma + M\alpha\gamma + N\alpha\beta = o.$$

Elle passe par les points E et D. On a donc

$$La + Mb + Nc = o, \quad La^3 + Mb^3 + Nc^3 = o.$$

L'équation de la conique devient, par conséquent,

$$(b^2 - c^2)bc\beta\gamma + (c^2 - a^2)ac\alpha\gamma + (a^2 - b^2)\,ab\alpha\beta = o. \quad (1)$$

On peut vérifier que cette conique passe bien par l'orthocentre H'

$$\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C,$$

condition d'ailleurs surabondante, car la conique passe déjà par cinq points A, B, C, E, D, et doit coïncider avec l'hyperbole équilatère (Γ), qui se trouve donc entièrement déterminée.

Le centre de la conique (1) serait donné par les équations

$$\frac{F'\alpha_0}{a} = \frac{F'\beta_0}{b} = \frac{F'\gamma_0}{c}$$

ou

$$(c^2 - a^2)c\gamma + (a^2 - b^2)b\beta = (b^2 - c^2)c\gamma + (a^2 - b^2)a\alpha$$
$$= (b^2 - c^2)b\beta + (c^2 - a^2)a\alpha,$$

qui ne semblent pas devoir conduire à un résultat simple.

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure du numéro de janvier (p. 14).

On peut acquérir, au contraire, une notion plus complète des tangentes à l'hyperbole (Γ).

3. — La polaire du point $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ a pour équation

$$\alpha F'\alpha_0 + \beta F'\beta_0 + \gamma F'\gamma_0 = 0.$$

La polaire du point K $\left(\frac{\alpha_0}{a} = \frac{\beta_0}{b} = \frac{\gamma_0}{c}\right)$ a donc pour équation

$$a\alpha[c^4 - b^4 + a^2b^2 - a^2c^2] + b\beta[a^4 - c^4 + b^2c^2 - a^2b^2] \\ + c\gamma[b^4 - a^4 + a^2c^2 - c^2b^2] = 0.$$

Mais cette équation est vérifiée par les coordonnées des points H, E, H', et représente la droite HEH'. On en conclut que la tangente au point E est EK; la tangente au point H', H'K. Le point K, centre des médianes antiparallèles ou point de Lemoine, est donc le pôle de la corde EH'.

D'autre part, la polaire du point S de concours des côtés ED, Z'H' du trapèze DEZ'H' est, par construction, la parallèle à DH' menée par le point d'intersection O des diagonales DZ', EH'. Cette polaire est donc la droite m_1m_2.

Nous venons de voir que EH' est la polaire du point K. Mais cette droite EH' passe aussi par le point O. Ce point, autrement dit, le centre du cercle (C') des neuf points, est donc le pôle de la droite HK par rapport à l'hyperbole équilatère (Γ).

La tangente en N à l'hyperbole est parallèle à H'K, le point N étant, en effet, diamétralement opposé sur la courbe au point H'. Cette tangente en N rencontre HK en un point Ω.

4. — Si maintenant l'on cherchait les coordonnées trilinéaires du point N, voici comment on pourrait les évaluer.

L'hyperbole (Γ) rencontre le cercle circonscrit au triangle aux quatre points A, B, C, N. Les coordonnées des sommets A, B, C du triangle sont connues; celles du point N se déduiront donc immédiatement de la combinaison de l'équation (1) avec l'équation du cercle circonscrit, c'est-à-dire

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0.$$

Éliminant $\alpha\beta$, par exemple, il vient

$$(b^2 - c^2)bc^2\beta\gamma + (c^2 - a^2)ac^2\alpha\gamma = (a^2 - b^2)ab(a\beta\gamma - b\alpha\gamma),$$

équation qui se décompose en deux autres : $\gamma = 0$, qui représente le côté AB, et

$$a\alpha(b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2) + b\beta(b^2c^2 + a^2b^2 - a^4 - c^4) = 0$$

qui représente la corde CN.

Les coordonnées du point N satisfont donc aux relations

$$a\alpha(n^4 - p^4 + a^4 - b^2c^2) = b\beta(n^4 - p^4 + b^4 - a^2c^2)$$
$$= c\gamma(n^4 - p^4 + c^4 - a^2b^2).$$

On obtiendrait les distances α, β, γ, en suivant la méthode habituelle (voir *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. II, 1883, p. 250-252); c'est-à-dire par les équations

$$a\alpha f_a = b\beta f_b = c\gamma f_c = \mathrm{K},$$

et

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\mathrm{S};$$

mais les expressions définitives paraissant devoir être trop compliquées, nous n'en pousserons pas plus loin la recherche, et nous procéderons différemment.

Les distances des points R et N, diamétralement opposés dans le cercle circonscrit, peuvent se déduire de celles des points H et D aux trois côtés.

L'on a, en effet,

$$\frac{\mathrm{RH}}{\mathrm{DH}} = \frac{n^4}{p^4 - n^4};$$

donc

$$\frac{\mathrm{R}_a - \mathrm{H}_a}{\mathrm{D}_a - \mathrm{H}_a} = \frac{n^4}{p^4 - n^4};$$

d'où

$$\mathrm{R}_a = \frac{2\mathrm{S}(a^4 - n^4 + 2b^2c^2)}{a(p^4 - n^4)}.$$

De même, pour le point N,

$$\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{DH}} = \frac{n^4}{p^4 - n^4};$$

donc

$$\frac{\mathrm{H}_a - \mathrm{N}_a}{\mathrm{D}_a - \mathrm{H}_a} = \frac{n^4}{p^4 - n^4},$$

d'où

$$\mathrm{N}_a = \frac{2\mathrm{S}(p^4n^4 - p^4a^4 - 2b^2c^2n^4)}{a(p^4 - n^4)(2n^4 - p^4)}.$$

Pour vérifier, par exemple, que les points N, D', H' sont en ligne droite, il suffit de réduire l'expression

$$\frac{H'_a - D'_a}{D'_a - N'_a}$$

On trouve ainsi

$$\frac{\dfrac{2S(2a^4 - p^4 + 2b^2c^2)}{a(2n^4 - p^4)} - \dfrac{2Sa^3}{p^4}}{\dfrac{2Sa^3}{p^4} - \dfrac{2S(p^4n^4 - p^4a^4 - 2b^2c^2n^4)}{a(p^4 - n^4)(2n^4 - p^4)}} = \frac{p^4 - n^4}{n^4},$$

ce qu'il fallait bien trouver, H'D étant parallèle à HD'.

On vérifierait, de même, les identités

$$\frac{EZ}{ZN} = \frac{Z'K}{KN} = \frac{p^4 - n^4}{3n^4}.$$

Enfin, d'après une intéressante remarque de M. Boubals, la droite de Simson correspondant au point N, dans le triangle donné ABC, est perpendiculaire à HK, et, par conséquent, celle du point R, diamétralement opposé à N, est parallèle à HK. (Voir plus haut, § 1.) *(à suivre.)*

NOTE

SUR UNE TRANSFORMATION TANGENTIELLE RÉCIPROQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous possédons depuis longtemps, dans nos papiers, quelques résultats relatifs à une méthode de transformation très élémentaire qui fait correspondre généralement à une courbe de la classe m une courbe de la classe $2m$.

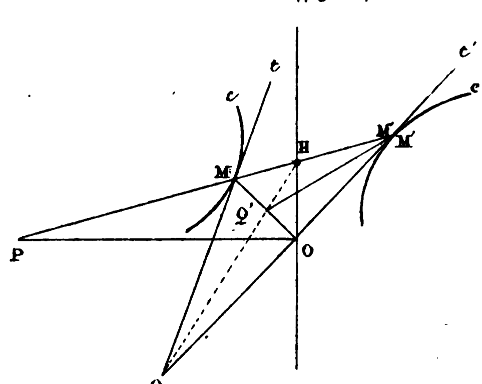
Nous avions oublié cette Note (*), lorsque M. de Longchamps, en nous communiquant ses intéressantes recherches sur la *transformation réciproque*, nous laremit en mémoire.

Or, il se trouve qu'il existe entre les deux méthodes une

(*) L'idée de cette Note remonte à peu près à l'époque de notre entrée à l'Ecole Polytechnique (1880).

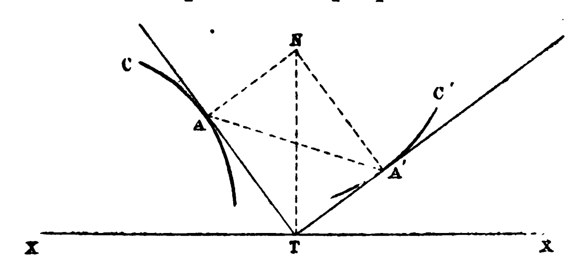
liaison des plus étroites; l'une peut se déduire de l'autre par une simple transformation par polaires réciproques; en sorte que chaque propriété démontrée pour l'une conduit immédiatement à une propriété corrélative pour l'autre. En effet, voici comment nous définissons la transformation tangentielle réciproque en question.

On donne un axe XX′ (*fig. 1*) et une courbe C. Une tangente quelconque AT à la courbe C coupe XX′ au point T. En T, élevons à AT une perpendiculaire TA′. Cette droite a pour enveloppe une courbe C′ qui est la transformée de C. On voit que, réciproquement, C est, suivant ce procédé, la transformée de C′.



Transformons par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O.

Soient P le pôle de XX′ (*fig. 2*) ;
M celui de AT;
M′ celui de AT′;
c et *c*′ les polaires réciproques de C et C′.



Les droites AT et A′T se coupant constamment sur la droite fixe XX′, les points M et M′ sont constamment en

ligne droite avec le point fixe P; l'angle ATA′ étant droit, la droite MM′ est vue du point O sous un angle droit. Donc, les courbes *c* et *c′* sont ***réciproques*** au sens dans lequel M. de Longchamps prend ce mot.

L'angle ATA′ étant constant *(fig. 1)*, les normales AN et A′N aux courbes C et C′ en A et A′ se coupent sur la normale TN à la droite XX′ en T. Cela permet de construire le point A′ connaissant le point A, et réciproquement. Quelle est la propriété corrélative dans la méthode de transformation de M. de Longchamps?

Soient Q le pôle de AN *(fig. 2)*,
Q′ celui de A′N,
N celui de TN.

Le point Q est sur la tangente en M à la courbe C et l'angle MOQ est droit, c'est-à-dire que le point Q est sur OM′.

De même, le point Q′ est à la rencontre de OM et de la tangente en M′ à la courbe *c′*.

Le point H est sur la droite MM′, et comme l'angle POH est droit, le point H est aussi sur la perpendiculaire élevée en O à la droite OP.

Les droites AN, A′N et TN de la première figure concourant au même point, les points corrélatifs Q, Q′ et H de la seconde sont en ligne droite.

Nous aurons donc, pour la transformation réciproque de M. de Longchamps, le théorème suivant :

M *et* M′ *étant des points correspondants sur deux courbes réciproques* c *et* c′, Mt *et* M′t′ *les tangentes à ces courbes en ces points,* O *le pôle secondaire, le point de rencontre de* Mt *et de* OM′, *et le point de rencontre de* M′t′ *et de* OM *sont en ligne droite avec le point de rencontre de* MM′ *et de la perpendiculaire élevée à l'axe des pôles par le point* O.

Cette perpendiculaire étant une droite fixe, les droites OM, OM′ et M*t* étant tracées, on voit que ce théorème fournit une construction extrêmement simple de la tangente M′*t′* à la courbe réciproque. Il suffit de joindre le point M′ au point de rencontre de M*t* et de OM′.

Nota. — On trouvera une théorie assez complète de la transformation dont nous venons de dire un mot et que nous

appellons *transformation orthotangentielle,* dans une brochure que nous sommes en train de publier chez M. Gauthier-Villars, sous le titre de : *Coordonnées parallèles et axiales.*

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite,* voir p. 16.)

Définition. — Lorsque deux polynômes U, V, ne sont pas premiers entre eux, on appelle plus grand commun diviseur de ces polynômes un autre polynôme D, qui les divise exactement et qui, en outre, jouit de cette propriété qu'aucun diviseur commun à U et à V ne possède un degré supérieur à celui de D.

Nous montrerons tout à l'heure que, abstraction faite des facteurs constants, il n'y a qu'un polynôme vérifiant les deux conditions que nous venons d'énoncer.

Théorème. — *Pour que* D *soit le plus grand commun diviseur des polynômes* U *et* V, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$U = U_1D, \qquad V = V_1D,$$

U_1, V_1, *désignant des polynômes premiers entre eux.*

1° La condition est *nécessaire.* En effet, si U_1 et V_1 admettaient un diviseur commun δ, en posant

$$U_1 = U_2\delta \quad \text{et} \quad V_1 = V_2\delta,$$

on aurait

$$U = U_2(D\delta), \qquad V = V_2(D\delta),$$

et ces identités montreraient que $D\delta$ est un diviseur commun à U et à V. Ainsi, D ne serait pas le plus grand commun diviseur et ceci est contraire à l'hypothèse.

2° La condition est *suffisante.* Pour le démontrer, remarquons d'abord que U_1 et V_1 étant premiers entre eux, nous

avons
$$\mu U_1 + \nu V_1 = 1,$$
et, par suite,
$$\mu U + \nu V = D. \qquad (1)$$

Cela posé, soit Δ un diviseur commun à U et à V; nous pouvons écrire
$$U = u\Delta, \quad V = v\Delta,$$
u, v étant des polynômes entiers. L'identité (1) devient alors
$$\Delta(\mu u + \nu v) = D. \qquad (2)$$

La forme $\mu u + \nu v$ n'est pas identiquement nulle, si D et par conséquent si U et V ne sont pas identiquement nuls, condition évidemment donnée. L'identité (2) prouve donc que tout diviseur Δ, commun à U et à V, est d'un degré égal ou inférieur à celui de D.

D'après cela, si un polynôme D divise exactement U et V et si ces divisions conduisent à des quotients premiers entre eux, il n'y a pas de diviseur, d'un degré supérieur à D, commun à U et à V.

On voit aussi que, dans le cas où Δ a un degré égal à celui de D, D et Δ sont identiques. Le cas que nous signalons ici correspond à celui où l'on suppose que $\mu u + \nu v$ est une constante.

Cela posé, nous allons résoudre le problème suivant:

Deux polynômes U *et* V *étant donnés, vérifier s'ils sont, ou non, premiers entre eux ; et dans le cas où ils ne sont pas premiers entre eux, déterminer leur plus grand commun diviseur.*

On remarquera, dans les développements qui vont suivre, le rapprochement que l'on peut faire entre la théorie du *plus grand commun diviseur* algébrique et celle du *plus grand commun diviseur* telle qu'elle peut être exposée en arithmétique.

Lemme. — *Si* U *n'est pas exactement divisible par* V, *le plus grand commun diviseur entre* U *et* V *est le même que celui qui existe entre le polynôme* V *et le reste* R, *obtenu en effectuant la division de* U *par* V.

Si U était exactement divisible par V, V serait évidemment le plus grand commun diviseur cherché. Supposons donc

que cette division ne se fasse pas exactement et conduise à l'identité

$$U \equiv VQ + R, \tag{1}$$

on voit d'abord que si U et V sont premiers entre eux, V et R sont, eux aussi, premiers entre eux. En effet, si V et R admettaient un diviseur commun Δ, VQ + R serait exactement divisible par Δ et les polynômes U et V ne seraient pas premiers entre eux.

Supposons maintenant que U et V admettent un *plus grand commun diviseur* D ; nous allons montrer que D est aussi le *plus grand commun diviseur* de V et de R.

On a, par hypothèse,

$$U \equiv U_1 D \tag{2}$$

$$V \equiv V_1 D \tag{3}$$

U_1 et V_1 étant deux polynômes entiers, premiers entre eux. L'identité (1) peut donc s'écrire

$$R \equiv (U_1 - V_1 Q) D; \tag{4}$$

$U_1 - V_1 Q$ est un polynôme entier qui n'est pas identiquement nul; car si l'on avait $U_1 - V_1 Q \equiv o$, on aurait $R \equiv o$ et par suite les polynômes U et V seraient exactement divisibles l'un par l'autre. Ainsi R est divisible par D et les identités (3) et (4) établiront que D est le *plus grand commun diviseur* des polynômes V et R, quand nous aurons montré que

$$V_1, \text{ et } (U_1 - V_1 Q)$$

sont premiers entre eux.

Considérons, en effet, un diviseur Δ de V_1; si Δ était un diviseur de $U_1 - V_1 Q$, Δ serait aussi un diviseur de U_1, ce qui ne peut être admis, U_1 et V_1 étant, nous le supposons, premiers entre eux.

RECHERCHE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE

Désignons toujours par U et V les deux polynômes proposés; divisons U par V, soit R_1 le reste obtenu; divisons V par R_1, soit R_2 le reste de cette division; et ainsi de suite.

Deux cas peuvent se présenter : 1° *le dernier reste obtenu* R_p *est numérique :* le *plus grand commun diviseur* entre U et V étant le même que ceux des polynômes

$$V \text{ et } R_1, \quad R_1 \text{ et } R_2, \ldots \quad R_{p-1} \text{ et } R_p$$

et ces derniers n'ayant pas de diviseur commun algébrique, on peut conclure de ce calcul que U et V sont premiers entre eux; 2° *le dernier reste* R_p *est nul :* dans ce cas, le *plus grand commun diviseur* entre R_{p-2} et R_{p-1} est égal à R_{p-1}; R_{p-1} représente donc le *plus grand commun diviseur* cherché. On conclut de cette théorie la règle suivante :

Règle. — *Étant donnés deux polynômes* U *et* V, *on divise successivement : 1°* U *par* V; *2°* V *par le reste* R_1 *de cette première division; 3°* R_1 *par le reste* R_2 *de cette deuxième division; et ainsi de suite : ces calculs conduisent nécessairement à une division dont le reste est numérique, ou égal à zéro : dans le premier cas,* U *et* V *sont premiers entre eux; dans la seconde hypothèse, ils admettent un plus grand commun diviseur qui est égal au diviseur employé dans la dernière division.*

Enfin, voici quelques propriétés qui se rattachent encore aux idées précédentes et qui nous seront utiles pour l'établissement du théorème fondamental de la théorie des équations.

Théorème. — *Un polynôme qui divise un produit de deux autres polynômes, et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.*

Soit P un polynôme divisant le produit (U . V) de deux polynômes U et V; je suppose que P soit premier avec V, je dis que P divise U.

En effet, P et V étant premiers entre eux, nous venons de reconnaître qu'il existait deux polynômes μ, ν vérifiant l'identité

$$\mu P + \nu V \equiv 1.$$

On a, par suite,

$$\mu PU + \nu VU \equiv U.$$

Par hypothèse, le polynôme P divise VU ; soit Q le quotient, on peut écrire

$$UV \equiv P.\ Q,$$

et, par conséquent,

$$P(\mu U + \nu Q) \equiv U.$$

Cette identité prouve que U est exactement divisible par P.

Théorème. — *Étant donnés deux polynômes* U *et* V; *si l'on peut trouver deux autres polynômes* P *et* Q, P *étant d'un degré inférieur à* V, *et* Q *d'un degré inférieur à* U, *tels que la relation*

$$PU - QV = o, \qquad (1)$$

soit vérifiée, U *et* V *ne sont pas premiers entre eux.*

La relation (1) donne

$$\frac{U}{V} = \frac{Q}{P}, \text{ ou } U = V\frac{Q}{P}. \qquad (2)$$

On peut d'ailleurs supposer que Q et P sont premiers entre eux, car s'ils admettaient un diviseur commun D, on pourrait diviser les deux membres de (1) par D, l'identité n'en subsisterait pas moins.

D'après l'identité(2), P divise le produit VQ ; il est premier avec Q, il divise donc V. Posons, d'après cela,

$$V = P \,.\, \theta, \qquad (3)$$

et observons que P étant, par hypothèse, d'un degré inférieur à V, θ est nécessairement une fonction entière de x, du premier degré, au moins.

Les identités (2) et (3) donnent alors

$$U = Q \,.\, \theta. \qquad (4)$$

Les relations (3) et (4) prouvent que les polynômes U et V admettent un diviseur commun θ, θ étant un polynôme entier en x; U et V ne sont donc pas premiers entre eux.

Remarque. — La réciproque est évidemment vraie. Si l'on suppose que l'on ait

$$U = U_1\Delta, \quad \text{et } V = V_1\Delta,$$

on a donc aussi

$$V_1U - U_1V = o.$$

Cette identité établit que *si* U *et* V *ne sont pas premiers entre eux, il existe deux polynômes* U_1, V_1; U_1 *et* V_1 *étant, respectivement, de degré inférieur à* U *et à* V *et tels que* V_1U *soit identique à* U_1V. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Hadamard, élève à l'École normale supérieure (*).

Je suis parvenu à tirer, des considérations que je vous ai présentées précédemment, une conséquence qui me paraît digne d'être signalée. Nous avons trouvé (α, β, γ étant les longueurs des tangentes issues d'un point à l'hypocycloïde, V, V', V'' les angles qu'elles font entre elles) les formules :

$$\frac{\alpha}{4R} = \sin V' \sin V'' ; \quad \frac{\beta}{4R} = \sin V'' \sin V ; \quad \frac{\gamma}{4R} = \sin V \sin V',$$

R désignant le rayon du cercle inscrit à la courbe. Transformons les points A, B, C par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point P pour origine. Les distances des points A'', B'', C'' ainsi obtenus au point P seront

$$\alpha_1 = \frac{K^2}{\alpha}, \; \beta_1 = \frac{K^2}{\beta}, \; \gamma_1 = \frac{K^2}{\gamma}$$

et l'on aura
$$\frac{\alpha_1}{\sin V} = \frac{\beta_1}{\sin V'} = \frac{\gamma_1}{\sin V''}$$

On voit aisément, à l'aide de ces proportions, que *le point* P *est le centre de gravité du triangle* A''B''C''.

Mais pour obtenir ce triangle, nous pouvons d'abord considérer le triangle A'B'C' polaire réciproque du triangle ABC par rapport à un cercle ayant le point P pour centre. Les points A'', B'', C'' sont les projections du point P sur les côtés du triangle A'B'C'.

Or, de ce que le point P est le centre de gravité de ses projections sur les côtés du triangle A'B'C', il résulte qu'il

(*) Voyez : *Journal*, *1884*, p. 227, une lettre de M. Hadamard à laquelle fait suite la présente. Voyez aussi (*loc. cit.*; p. 169) notre note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Dans la lecture de la lettre ci-dessus, il faut supposer : 1° que A, B, C représentent les points de contact des tangentes issues du point P; 2° A', B', C' les pôles des droites BC, CA, AB par rapport à un cercle de centre P; 3° A'', B'', C'' les inverses des points A, B, C par rapport au même cercle. G. L.

est le centre des médianes anti-parallèles de ce triangle; et, par suite, que la droite PA′, par exemple, est la conjuguée harmonique par rapport aux côtés A′B′, A′C′, de la tangente en A′ au cercle A′B′C′.

Si nous passons alors à la figure polaire réciproque, le cercle A′B′C′ deviendra une ellipse ayant P pour foyer et inscrite au triangle ABC. D'ailleurs cette ellipse touche le côté BC en son milieu, et, de même, chacun des deux autres côtés: elle est donc l'ellipse maximum inscrite au triangle :

Ainsi *le point P est un foyer de l'ellipse maximum inscrite au triangle* ABC.

QUESTIONS D'EXAMENS

5. — *Trouver la vraie valeur des expressions indéterminées suivantes :*

1° $$y = \frac{Lx^p - La^p}{x - a}, \quad \textit{pour } x = a.$$

On posera $x - a = a\alpha$; y prend la forme

$$y = p\,\frac{L(1 + \alpha)}{a\alpha}.$$

La valeur cherchée est donc $\frac{p}{a}\,Le$.

2° $$y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}, \quad \textit{pour } x = 0.$$

On peut, adoptant la méthode générale, remplacer e^x et e^{-x} par le développement connu, réduit à trois termes. On peut aussi raisonner comme il suit.

Posons

$$e^x = X, \quad (X = 1, \text{ pour } x = 0),$$

nous aurons alors

$$y = \frac{X^2 - 1}{XLX} = \frac{X + 1}{X}, \ \frac{X - 1}{LX}.$$

En faisant $a = 1$ dans l'exercice précédent, nous voyons que

$$\lim \frac{X - 1}{LX} = 1, \quad \text{pour } X = 1\,;$$

finalement, nous avons donc

$$\lim y = 2.$$

3° $$y = \frac{1}{x} + Lx, \quad \textit{pour } x = 0.$$

Nous poserons

$$x = \frac{1}{X}, \quad (X = \infty, \text{ pour } x = 0)$$

et nous aurons

$$y = X - LX = X\left(1 - \frac{LX}{X}\right).$$

Nous savons d'ailleurs que, si X croît au delà de toute limite, le rapport $\frac{LX}{X}$ tend vers zéro. D'après cela, y croît au delà de toute limite.

4° $$y = \frac{e^x - 1}{\sin x}, \quad \textit{pour } x = 0.$$

Posons encore $e^x = X$, nous avons

$$y = \frac{X - 1}{LX}\left(\frac{x}{\sin x}\right).$$

Ainsi, d'après ce que nous venons de voir tout à l'heure,

$$\lim y = 1.$$

5° $$y = (2 - e^x)^{\frac{1}{x}} \quad \textit{pour } x = 0.$$

Posons

$$2 - e^x = 1 + \alpha, \quad (\alpha = 0, \text{ pour } x = 0).$$

Nous avons

$$y = \left\{(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1-e^x}{x}}$$

et, d'après la limite déterminée dans l'exercice précédent,

$$\lim y = e^{-1}.$$

6° $$y = \frac{\sin px}{l(1 + x)}, \quad \textit{pour } x = 0.$$

On a

$$y = p\left(\frac{\sin px}{px}\right)\frac{x}{l(1 + x)},$$

d'où $$\lim y = \frac{p}{l.e}.$$

6. — *Prendre la dérivée de l'expression*

$$y = \text{arc sin}\,(x\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - x^2}).$$

On trouve facilement

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

D'après ce résultat, on peut vérifier que, après avoir posé

$$Y = \text{arc sin}\, x,$$

et

$$a = \sin \varphi,$$

on a bien

$$y = Y - \varphi.$$

7. — *Calculer la dérivée de* y,

$$y = \cos\,(2\ \text{arc cos}\ x).$$

En posant

$$\text{arc cos}\, x = X,$$

ou

$$x = \cos X,$$

on a

$$y = \cos 2X = 2x^2 - 1.$$

Ainsi,

$$y' = 4x.$$

(A suivre.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

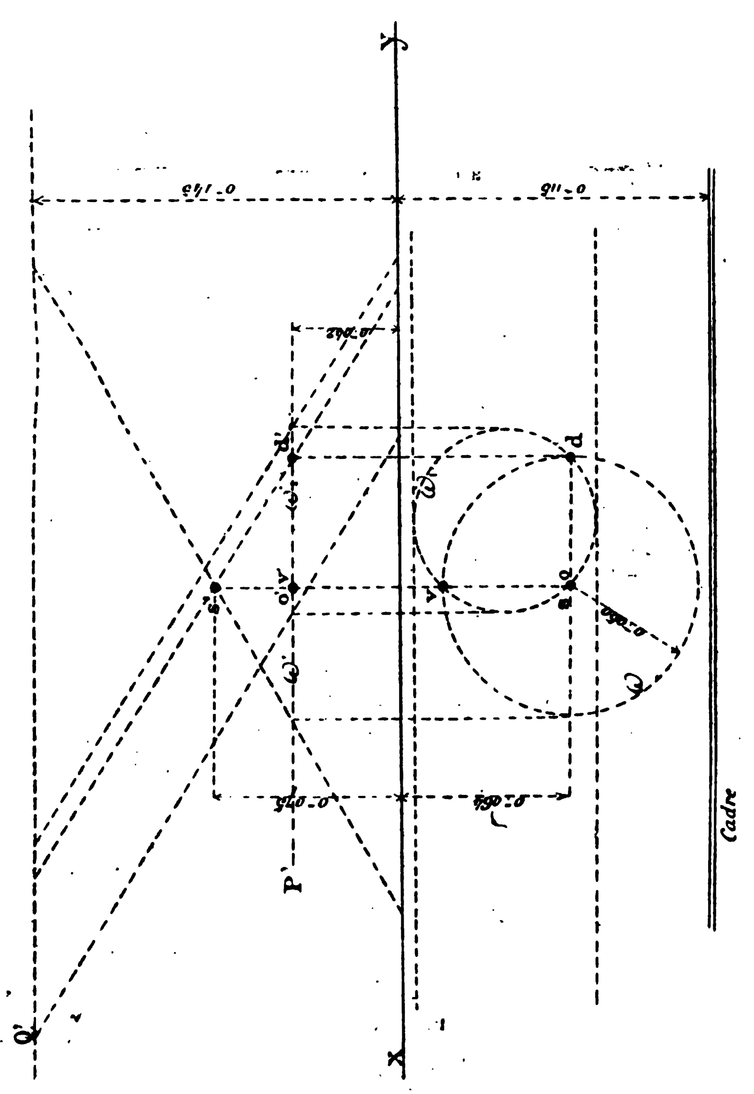
DEUXIÈME SESSION DE 1884

Épure.

Intersection d'un cône de révolution et d'un cylindre.

Dans un plan horizontal P' à la cote $0^m,042$, on trace deux cercles : le premier ω, ω' est la directrice du cône, il a $0^m,050$ de rayon et son centre o, o' se trouve à $0^m,064$ en avant du plan vertical ; le second ω_1, ω_1' est la directrice du cylindre, il passe par le centre o, o', par le point v, v' le plus voisin du plan vertical et par le point le plus à droite d, d' du premier cercle. Le sommet s, s' du cône a pour cote $0^m,075$, et les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite sd, $s'd'$.

On demande de construire les projections du corps consti-



tué par la partie des deux nappes du cône, supposées pleines et opaques, placée à l'intérieur du cylindre et comprise

entre un plan horizontal Q′, ayant une cote de $0^m,145$ et le plan horizontal de projection.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celle des points et des droites remarquables.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure,

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection d'un cône et d'un cylindre. Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre à $0^m,115$ du grand côté inférieur, et la droite ss' au milieu de la feuille.

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et une droite quelconque coupant ces axes respectivement aux points A et B.

On prend sur cette droite un point m dont les coordonnées sont α et β et on construit, dans le plan, un point correspondant M ayant pour coordonnées

$$x = \frac{f^2}{\alpha}, \qquad y = \frac{g^2}{\beta},$$

f et g étant deux longueurs constantes données.

Ceci posé : 1° On demande d'écrire l'équation du lieu des points M, lorsque le point m se déplace sur la droite indéfinie AB. Ce lieu est une hyperbole qu'on désignera, dans ce qui va suivre, par la lettre H ;

2° On demande de déterminer les éléments nécessaires à la définition complète de cette hyperbole H et d'en construire géométriquement un point quelconque, ainsi que la tangente en ce point ;

3° On suppose que la droite AB se déplace dans le plan, de façon telle que la somme des inverses de ses coordonnées à l'origine reste constante ; soit, de façon que

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{l} = \text{const.}$$

A chaque position de la droite répondra une hyperbole H.

On demande de montrer que toutes ces hyperboles ont

une corde commune et de trouver le lieu des pôles de cette corde relativement aux diverses hyperboles (c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels elle est corde de contact des tangentes menées de ce point à l'une des hyperboles).

4° On projette le centre C de l'hyperbole H répondant à la droite AB, sur cette droite, en D; et on demande de trouver le lieu des points D lorsque la droite AB se déplace, non plus selon la loi ci-dessus définie, mais en restant parallèle à elle-même.

Trigonométrie.

Calculer les angles et la surface d'un triangle dont les trois côtés sont :

$$a = 4356^{m},742,$$
$$b = 3754\ ,682,$$
$$c = 2574\ ,754.$$

QUESTION 53

Solution par M. Henri Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

Soient a, b, c, d, *quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle; si l'équation*

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, l'équation proposée a au moins deux racines imaginaires. (Walecki.)

Le reste de la division du polynôme

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

par le tiers de sa dérivée

$$ax^2 + 2bx + c,$$

étant, au facteur $\frac{1}{a}$ près,

$$2(ac - bd)\,x + ad - bc,$$

la condition pour que l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

ait ses trois racines réelles et distinctes est :

$$4(ac - b^2)^2 \frac{c}{a} - 4(ac - b^2)(ad - bc) \frac{b}{a} + (ad - bc)^2 < 0$$

ou

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0. \qquad (1)$$

Or, on sait (*Cours d'algèbre* de M. de Longchamps, exercices sur le théorème des lacunes) que quatre coefficients consécutifs d'une équation n'ayant que des racines réelles vérifient l'inégalité (1) ; si donc les trois racines de l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

ne sont pas réelles et distinctes ; c'est-à-dire si l'inégalité (1) n'est pas vérifiée, aucune des équations, dont a, b, c, d sont quatre coefficients consécutifs, ne peut avoir toutes ses racines réelles.

NOTE. — La condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré s'obtient, un peu plus rapidement, en écrivant que le résultant des dérivées partielles de la forme rendue homogène est négatif. — Le théorème auquel renvoie ce travail peut se démontrer directement en écrivant que le facteur $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, choisi pour faire apparaître une lacune de deux termes, a ses racines imaginaires. G. L.

Ce numéro était composé quand nous avons appris la mort soudaine de M. Vazeille. Le temps et aussi certains renseignements nous manquent pour retracer aujourd'hui, convenablement, la vie si occupée, et tout entière vouée au travail, de cet éminent professeur, mort à la peine. Mais nous espérons pouvoir, dans une notice qui paraîtra dans le prochain numéro de ce journal, rendre à la mémoire de celui qui fut ici, pendant près de trois années, notre collaborateur, le tribut d'éloges auquel elle a droit.

G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 3160-5.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR VAZEILLE

Dans le précédent numéro de ce Journal, nous avons eu le vif regret d'annoncer la mort soudaine de notre collaborateur Vazeille. En communiquant à nos lecteurs cette nouvelle si imprévue, nous nous sommes engagés en même temps à leur parler une dernière fois de ce professeur distingué, à rendre hommage à ses qualités si diverses et si variées; nous venons aujourd'hui remplir ce devoir douloureux.

Vazeille était originaire des environs de Clermont et il fit, au lycée de cette ville, de brillantes études littéraires. Il avait d'ailleurs gardé beaucoup de cette première éducation; à la façon élégante et correcte avec laquelle il s'exprimait, on reconnaissait vite l'homme de science doublé du lettré. Il entra à l'École Polytechnique dans la promotion de 1845, en sortit élève ingénieur des ponts et chaussées; mais, pour des raisons qui ne nous sont pas connues, poussé peut-être par un goût prononcé pour l'enseignement, carrière pour laquelle il était si bien doué, il donna sa démission, vers 1850 ou 1851. Depuis cette date, Vazeille n'a pas cessé d'appartenir à l'enseignement libre; il en fut, pendant plus de trente ans, un des représentants les plus en vue.

Il y a environ trois ans que Vazeille, succédant à M. Kœhler, alors très souffrant, dans la direction des études à l'Ecole Préparatoire de Sainte-Barbe, vint prendre, en même temps, la situation de rédacteur-gérant au *Journal de Mathématiques*. A cette époque, bien que connaissant Vazeille depuis quelques années, je suis entré nécessairement en relations plus fréquentes et plus intimes avec cet esprit remarquablement souple et fin. Vazeille frappait, au premier abord, par l'expression caractérisée de sa physionomie, par la vivacité exceptionnelle de son esprit toujours en éveil, par l'élégance et la séduction de sa parole. Nous avions alors, nous avons eu jusque dans ces derniers temps,

dans ce cabinet où la mort est venue le foudroyer, des séances mensuelles, pendant lesquelles les membres du comité de rédaction de ce Journal échangeaient leurs opinions et leurs idées sur les travaux divers qui étaient parfois soumis à leur appréciation. On se fera difficilement une idée de ce qu'était Vazeille dans ces circonstances; de l'abondance et de la variété inépuisables de ses appréciations ; enfin, de la verve finement aiguisée dont il parsemait ses réflexions. J'ai toujours pensé, après avoir assisté aux discussions que je viens de rappeler, que Vazeille, professeur et peut-être plus encore conférencier des plus distingués, eût été, si les circonstances l'y avaient poussé, un critique mathématique de premier ordre.

Il sentait bien d'ailleurs cette force maîtresse qui était en lui, et plus d'une fois il a voulu me rattacher à une idée, que je n'ai jamais goûtée, mais qu'il défendait avec cette chaleur vive que donne une conviction sincère. Cette idée, à laquelle il revenait toutes les fois que l'occasion favorable se présentait de le faire, était d'engager le Journal dans la voie de la critique ; non pas de cette critique banale, le plus souvent dictée par des considérations de personnes, d'amitiés ou de recommandations; mais, comme il disait, de la vraie critique, la critique sans ménagements, la critique impitoyable, enfin. C'était bien là, en effet, le terrain sur lequel Vazeille se fût développé complètement. Les sous-entendus et les ménagements n'étaient pas du ressort de ce caractère personnel et tout entier, qui poussait la franchise on pourrait dire jusqu'à l'excès, s'il était permis de fixer une limite à une si belle qualité.

Je ne suis pas non plus éloigné de penser que cette tendance si marquée de cet esprit vers la critique n'ait été une des raisons pour lesquelles il a si peu produit. Mais la cause véritable de cette abstention presque absolue de Vazeille dans la rédaction de ce Journal est la peine extrême qu'il éprouvait à détacher, de sa vie si remplie, quelques heures de liberté. Je puis dire, dans tous les cas, pour avoir été le témoin des promesses, j'oserais presque dire des serments qu'il nous faisait, que ce n'est pas la bonne volonté

qui lui manquait. Des promesses, il s'en faisait à lui-même tous les jours. C'est ainsi qu'il a passé des années se proposant sans cesse d'écrire son cours de mathématiques spéciales ; mais je ne serais pas surpris d'apprendre que la première page de ce manuscrit est encore blanche. Il voulait aussi, depuis longtemps, publier une Géométrie descriptive, science pour laquelle il avait une prédilection marquée. Il possédait d'ailleurs, dans cette spécialité, une compétence incontestable et qui, si nos souvenirs sont exacts, fut très remarquée de ceux qui suivirent, il y a un certain nombre d'années, le cours de Géométrie descriptive qu'il professa, à cette époque, au lycée Charlemagne.

En terminant cette notice que je me reprocherais de faire aussi courte, si les discours qu'on lira plus loin n'étaient pas là pour suppléer dignement à son insuffisance, je veux encore rappeler dans la vie de Vazeille un bien petit incident, mais dont le souvenir m'a vivement frappé, quand j'ai connu sa mort foudroyante.

Il y a deux ans environ, au sortir d'une des séances du comité, Vazeille disait à l'un de nous : « Un tel, croyez-moi, vous travaillez beaucoup trop; il faut savoir se ménager et vous ne résisterez pas longtemps à tant de fatigues. ». Et il nous citait des exemples, hélas ! ils sont nombreux, de professeurs tués par l'excès du travail. C'étaient là, assurément, de sages paroles, bien que peut-être (c'est souvent le sort dés meilleures), elles n'aient pas été très écoutées par celui auquel elles s'adressaient. Mais n'est-il pas singulier de voir, une fois de plus, combien nous sommes aveugles sur nous-mêmes, et combien nous aimons à donner aux autres des avis que nous n'avons pas la force d'imposer nous-mêmes à notre conduite ? N'est-il pas curieux, par exemple, de constater, dans le cas que nous citons, que c'était justement celui d'entre nous qui se dépensait le plus, qui, à l'âge où l'on peut songer à un repos prochain, avait à faire face, non seulement à l'enseignement des mathématiques spéciales au collège Stanislas et à l'école préparatoire de Sainte-Barbe, mais encore à la direction des études de cet établissement, qui conseillait

des ménagements, qui recommandait le repos ? Peut-être est-il juste d'ajouter que ces ménagements sont au-dessus des forces humaines, pour certains tempéraments du moins ; et ceux-là, entraînés par la force des choses, prenant le travail sans compter, sans réflexion, vivent absorbés par lui, comme a vécu Vazeille, et comme lui, au jour fatal, meurent à la peine.

G. L.

DISCOURS DE M. DUBIEF

DIRECTEUR DE SAINTE-BARBE

Au nom de Sainte-Barbe je viens dire un dernier adieu à l'un de ses maîtres les plus distingués, à l'un de ses amis les plus fidèles.

Ce n'est pas la première fois que les élèves de Sainte-Barbe et de Stanislas se rencontrent, hélas ! dans une cérémonie funèbre. Il y a quelques années ils venaient rendre ensemble les derniers devoirs à un professeur éminent qui appartenait aux deux collèges, à M. Gros, dont le souvenir demeure vivant parmi nous. Aujourd'hui encore ils se retrouvent mêlant leurs regrets et leurs larmes devant la tombe d'un professeur adoré.

Je dis adoré, l'expression n'est pas trop forte : car M. Vazeille avait toutes les séductions, la séduction du talent, la séduction de la bonté unie à la grâce. Sorti de l'École Polytechnique, où il occupait un des premiers rangs de sa promotion, il entra de bonne heure dans l'enseignement libre, et ne tarda pas à s'y faire une place exceptionnelle par ses rares qualités. Pendant vingt ans nous l'avons vu à l'œuvre et nous avons pu apprécier la lucidité de ses leçons et l'éclat de sa parole. Peu de professeurs ont eu comme lui le don d'intéresser et d'entraîner leurs élèves, de leur communiquer l'ardeur dont il était animé. M. Vazeille en effet n'était pas seulement un mathématicien; c'était un mathématicien éloquent, un lettré, un artiste, un esprit

ouvert à la fois à tout ce qui est vrai, à tout ce qui est beau. Ainsi s'explique la fascination qu'il exerçait autour de lui; de là les brillants succès qu'il a remportés tant de fois, et particulièrement l'an dernier, qui a été en quelque sorte le couronnement de sa carrière. Qui nous aurait dit qu'il serait si vite ravi à notre affection? Il était si plein de force et de vitalité! il supportait si facilement le fardeau qu'il s'était imposé! sa vigueur, son activité infatigable, tout semblait lui promettre de longs jours. Et voilà que tout à coup, sans maladie, sans aucun signe précurseur, il est tombé au milieu de nous. Ce n'est pas du soir au matin, ce n'est pas en quelques heures qu'il a passé : il a été foudroyé instantanément. Une minute a suffi pour éteindre ce brillant esprit, pour glacer ce cœur si chaud et si généreux.

Devant une mort si imprévue, si prématurée, nous n'avons qu'à nous incliner tristement et à méditer, jeunes et vieux, sur la fragilité de notre existence éphémère. Les paroles sont impuissantes à exprimer la stupeur douloureuse dont nous avons été saisis et dont nous ne sommes pas encore revenus. Puisse au moins la sincérité de notre affliction, puisse le souvenir de gratitude que M. Vazeille laisse dans le cœur de ses élèves, puisse surtout la pensée qu'il jouit d'un bonheur sans mélange dans un monde où il n'y a plus ni surprises ni déceptions, adoucir dans la mesure du possible la douleur profonde et durable de sa famille et de ses nombreux amis qui pleurent avec nous!

DISCOURS DE M. L'ABBÉ PRUDHAM

DIRECTEUR DU COLLÈGE STANISLAS

Messieurs, je voudrais, avant de m'éloigner de cette tombe, dire un mot d'adieu à M. Vazeille au nom du collège Stanislas, c'est-à-dire au nom du directeur, des professeurs, des élèves ici présents et aussi des anciens qui, pendant ces

quinze dernières années, ont suivi les cours de ce maître habile.

M. le Directeur de Sainte-Barbe vient de faire l'éloge du défunt : il l'a fait avec beaucoup de cœur, d'éloquence et avec une autorité incontestable. Je remercie M. le Directeur d'avoir ainsi rendu mon devoir plus facile : je n'aurai que peu de mots à ajouter, car je souscris des deux mains à tout ce qui vient d'être dit.

J'ai connu en M. Vazeille le collaborateur actif, intelligent, fidèlement dévoué ; le professeur dont les rapports avec ses collègues étaient empreints de beaucoup d'urbanité, de courtoisie et de cordialité, le professeur à la parole nette, claire, dont l'enseignement brillant était couronné des plus beaux succès.

Cette année, en particulier, a été pour ce professeur distingué une année glorieuse : on peut dire que M. Vazeille meurt enseveli dans son triomphe.

Enfin, j'ai connu en M. Vazeille l'homme au cœur sensible et généreux, aux sentiments élevés, une âme d'artiste, ardente, se passionnant facilement pour la cause du bien, de la vérité et de la justice. C'est à ce regretté collaborateur, à cet homme si estimé, à cet éminent professeur que je viens payer un juste tribut de regrets et de reconnaissance.

Tant de qualités et de vertus, jointes aux miséricordes infinies de Dieu, sont une consolation et une espérance pour sa famille désolée et pour nous tous que la mort a frappés d'un deuil si soudain. Vous surtout, jeunes gens qui m'écoutez, retenez bien cette dernière leçon de votre maître, et lorsque la mort viendra vous saisir, qu'elle vous trouve dans le chemin du devoir et toujours préparés à la suivre.

M. le Directeur de Sainte-Barbe a fait dans son discours un rapprochement instructif ; il a rappelé que les élèves de Stanislas et de Sainte-Barbe étaient déjà, il y a onze ans, confondus près de la tombe de leur professeur commun de mathématiques spéciales, M. Gros ; mais ce que M. Dubief n'a pas dit, le fait qui ajoute à l'enseignement de

ce souvenir, c'est que c'est le plus jeune des deux Directeurs qui firent alors l'éloge funèbre de celui-ci, que Dieu a rappelé à lui.

Quant à moi, pour qui la mort a eu déjà bien des rigueurs, je ne séparerai jamais dans mon souvenir ce dernier coup qu'elle vient de frapper de la mémoire de cet homme si vivement regretté à qui nous venons rendre les derniers hommages.

Au nom du collège Stanislas, merci, cher Monsieur Vazeille, et au revoir, ou mieux, employant le mot dans son sens vrai et chrétien : Adieu!

SUR LES TANGENTES

COMMUNES A UN CERCLE ET A UNE PARABOLE

Par M. **Joseph Neuberg**, professeur à l'Université de Liège..

(*Suite*, voir p. 25.)

7° On peut encore déduire de l'équation (3) d'autres résultats remarquables. Si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont les angles de quatre tangentes concycliques avec l'axe de la parabole, on a

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 = -\frac{4(R+\beta)}{p},$$

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 = \frac{8\alpha - 2p}{p},$$

$$\Sigma \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1} = -\frac{4(R-\beta)}{d}$$

d'où

$$R = -\frac{p}{8} \Sigma \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1} \right) = -\frac{p}{4} \Sigma \frac{1}{\sin \varphi_1}, \quad (7)$$

$$\beta = -\frac{p}{8}\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1}\right) = \frac{p}{4}\Sigma\operatorname{cotg}\varphi_1, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{\beta}{\alpha - \frac{1}{2}p}. \quad (9)$$

Or, si une tangente quelconque rencontre en P la tangente au sommet A, le triangle FAP donne

$$AF = \frac{1}{2}p\operatorname{cotg}\varphi, \quad FP = \frac{p}{2\sin\varphi}.$$

On sait aussi que AF est la moitié de l'ordonnée du point de contact de la tangente. Dès lors, les formules (7), (8), (9) admettent l'interprétation suivante :

Lorsqu'un cercle et une parabole sont inscrits à un même quadrilatère : 1° le rayon du cercle est la demi-somme algébrique des distances du foyer aux côtés ; 2° le centre du cercle et le centre des moyennes distances des points de contact de la parabole sont sur un même diamètre de la parabole ; 3° la somme des inclinaisons des côtés du quadrilatère sur l'axe de la parabole diffère, d'un multiple de 2π, *du double de l'inclinaison du même axe sur la droite joignant le foyer au centre du cercle.*

La seconde partie de cette proposition est déjà connue. Car la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère circonscrit aux deux courbes passe par le centre du cercle et par celui de la parabole; c'est donc un diamètre de la parabole. L'ordonnée de ce diamètre par rapport à l'axe est une moyenne arithmétique des ordonnées de deux sommets opposés du quadrilatère, et, par suite, une moyenne des ordonnées des points de contact; donc ce diamètre passe par le centre des moyennes distancées des points de contact.

La propriété tirée de la formule (9) est susceptible d'un autre énoncé qui le rend applicable aux coniques à centre. Les paramètres de quatre tangentes concycliques menées à une ellipse sont racines de l'équation

$$[(\beta + R)^2 - b^2] \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\varphi + 4\alpha(\beta + R) \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}\varphi$$
$$+ (4\alpha^2 - 2\beta^2 + R^2 - 2\alpha^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi - 4\alpha(\beta - R) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$$
$$+ (\beta - R)^2 - b^2 = 0;$$

d'où
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - c^2} \quad (10)$$

Ce résultat montre que la moyenne des inclinaisons des quatre tangentes sur une droite fixe ne dépend que du centre du cercle inscrit. Soient C le centre du cercle, MNPQ le quadrilatère formé par les tangentes. La moyenne des inclinaisons des droites NM, NP est égale à l'inclinaison de leur bissectrice CN; propriété analogue pour QP, QM, QC. Donc l'égalité (10) exprime que les bissectrices des angles NCQ, MCP ont des directions constantes. Mais lorsque le rayon R devient nul, les côtés du quadrilatère MNPQ se confondent avec les tangentes menées de C à l'ellipse. Donc lorsque R est quelconque, les bissectrices des angles NCQ, MCP se confondent avec celles des tangentes menées de C, ou, ce qui revient au même, avec celles des droites CF, CF'.

8° Les éléments du cercle osculateur résultent aussi des formules du paragraphe 7. Soient φ, φ_1 l'inclinaison de la tangente au point d'osculation M et celle de la seconde tangente commune au cercle et à la parabole. Si l'on fait

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_1 = \operatorname{cotg}^3 \frac{1}{2}\varphi, \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_3 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_4 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi,$$

on trouve
$$R = -\frac{p}{8}\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}\right)^3 = -\frac{p}{\sin^3 \varphi}$$
$$\beta = \frac{p}{8}\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}\right)^3 = -p \operatorname{cotg}^3 \varphi,$$
$$\frac{8\alpha - 2p}{p} = 3\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}\right),$$

$$\frac{8(\alpha - p)}{p} = 3\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}\right)^2 = 12\cot^2\varphi,$$

$$\frac{8\alpha + 4p}{p} = 3\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}\right) = \frac{4}{\sin^2\varphi}.$$

Ces égalités conduisent à la construction du centre de courbure et à l'équation de la développée.

Soient R_1, R_2, R_3, R_4 les rayons de courbure aux points de contact de quatre tangentes concycliques. On vient de trouver

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1} = \left(-\frac{8R_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ etc.}$$

Par suite, en vertu de l'égalité (7) :

$$\frac{R}{p} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{R_2}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{R_3}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{R_4}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

En particulier, si R est le rayon du cercle osculateur en un point M, et R_1 celui au point de contact de la seconde tangente commune au premier cercle et à la parabole, on a

$$\frac{4R}{p} - 3\left(\frac{R}{p}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS

ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 30.)

5. — Ces préliminaires établis, observons que le point N de l'hyperbole (Γ) est le centre d'un faisceau de droites passant par des points correspondants de l'hyperbole et de

la droite HK, ces points étant d'ailleurs répartis suivant une certaine symétrie.

Soit $S'\Sigma'$ la corde de l'hyperbole parallèle à HK. Les propriétés remarquées jusqu'à présent permettent de reconnaître que SN passe par le point Σ' et que $S'N$ rencontre HK en un point Σ correspondant à Σ'.

Si nous resserrons l'intervalle $S'\Sigma'$, nous aurons à la imite, sur l'hyperbole (Γ), le point de contact Δ' de la tangente parallèle à HK, et au point Δ où $\Delta'N$ rencontre HK, le point correspondant à Δ'.

Ce point Δ est donc, par sa nature même, un des *points doubles* de l'involution déterminée sur HK par les faisceaux de droites (NH, ND'), (NZ, NK), (NS, NΣ).

Mais la direction f_1f_2S est conjuguée à celle des cordes parallèles à HK; le point Δ' est donc à l'intersection de cette droite f_1f_2 ou OS avec l'hyperbole (Γ).

L'autre point double Δ est à l'intersection de HK avec la ligne NΔ', c'est-à-dire la ligne qui joint le point N au point diamétralement opposé à Δ' sur l'hyperbole (Γ).

Le point Ω_1, défini plus haut, est au milieu de l'intervalle $\Delta\Delta_1$, et représente, par conséquent, le *point central* de l'involution précitée, dont Δ et Δ_1 sont les deux *points doubles*. (Voir Chasles, *Géométrie supérieure*, 1880, §§ 202 à 213.)

Ces considérations donnent une idée du rôle remarquable et important du point N dans toute cette nouvelle série de propriétés du centre O du cercle (C').

La notion des points doubles Δ, Δ_1, et du point central Ω devient l'origine d'une série de relations métriques.

Par suite du mode de construction, les points précités sont toujours réels.

Le point central Ω est à l'intersection de HK avec la tangente à l'hyperbole (Γ) en N, c'est-à-dire avec une parallèle NΩ à H'K.

Les points doubles Δ, Δ_1 s'obtiennent facilement. Il suffit de décrire, sur un segment de l'involution tel que HD', ZK, etc., comme diamètre, une circonférence, et de lui mener une tangente par le point Ω. La longueur de cette tangente est constante et égale à $\Omega\Delta$ ou $\Omega\Delta_1$.

6. — Passons aux relations métriques.

On a déjà, pour le point central,

$$\Omega H \,.\, \Omega D' = \Omega Z \,.\, \Omega K.$$

Mais

$$\Omega D' = \Omega H - HD', \quad \Omega Z = \Omega H - \frac{HK}{2}, \quad \Omega K = \Omega H - HK$$

L'équation précédente devient alors

$$\Omega H = \frac{HK}{3 - \dfrac{m^4}{p^4}} = \frac{abcp^4}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}\sqrt{p^4 - n^4}} = \frac{HKp^4}{2(p^4 - n^4)}.$$

Pour les points doubles, on a

$$\Omega Z.\,\Omega K = \overline{\Omega\Delta}^2 = \Omega H(\Omega H - HD') = \frac{a^2b^2c^2n^4}{m^4(p^4 - n^4)}$$

et

$$\Omega\Delta = \Omega\Delta_1 = \frac{abcn^2}{m^2\sqrt{p^4 - n^4}} = \frac{n^2\sqrt{2n^4 - p^4}}{2(p^4 - n^4)}HK.$$

Pour déterminer la position du point Σ, l'on a

$$\Omega S \,.\, \Omega\Sigma = \overline{\Omega\Delta}^2;$$

d'où

$$\Omega\Sigma = \frac{\overline{\Omega\Delta}^2}{\Omega H - HS} = \frac{2n^8abc}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}\sqrt{p^4 - n^4}(n^4 + p^4)}.$$

Enfin, au moyen des relations trouvées dans toutes les précédentes notices, l'on vérifiera aisément les identités qui expriment que quatre points sont en ligne droite.

Ainsi, pour les quatre points H, Z, S, D', par exemple, l'on doit avoir

$$HZ.SD' + ZS.HD' = HS.ZD',$$

ou

$$HZ.SD' = HS.ZD' - ZS.HD',$$

relation qui se réduit effectivement à

$$\frac{a^2b^2c^2(p^4 - n^4)}{2n^4p^4} = \frac{a^2b^2c^2(p^4 - n^4)}{2n^4 - p^4}\left(\frac{1}{p^4} - \frac{1}{2n^4}\right).$$

NOTE. — La propriété fondamentale que traduit cette relation entre les segments déterminés sur une droite par quatre points a été indiquée, pour la première fois, par EULER.

7. — Ainsi que je l'ai fait remarquer (*loc. cit.* p. 203), la

conique (Γ) n'est pas le seul exemple d'hyperbole équilatère passant par plus de cinq points du plan. Le théorème rappelé à propos du quadrilatère s'applique au triangle, mais alors le nombre de points, de neuf ou dix, se réduit à six:

1° Les trois milieux A',B',C', des côtés;

2° Le centre H du cercle circonscrit au triangle ABC (qui est alors le point de rencontre des hauteurs, ou l'orthocentre du triangle A'B'C') (propriété connue);

3° Un sommet A du triangle;

4° L'intersection D du côté opposé BC avec la tangente en A au cercle circonscrit.

Le centre de cette hyperbole, circonscrite au parallélogramme AB'A'C', est au point d'intersection des diagonales AA', B'C', et les deux points A et A' peuvent être considérés comme les centres des faisceaux générateurs de l'hyperbole. Les directions des asymptotes sont celles des bissectrices de l'angle BAC. (E. Dewulf.)

8. — Il me reste, toutefois, à signaler une propriété plus intéressante, qui offre alors une plus complète analogie avec la notion des hyperboles de neuf points. J'ai eu l'occasion de reconnaître, à propos d'une question toute différente (*) de celle qui nous occupe actuellement, la notion d'une autre hyperbole équilatère passant aussi par dix points du plan, et circonscrite à un triangle au lieu d'être circonscrite à un quadrilatère.

Considérons, en effet, un triangle ABC. Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle passent par son orthocentre. Ce quatrième point ne détermine donc pas ces coniques, et pour en fixer une, il est nécessaire d'avoir une autre donnée. Prenons par exemple, la direction (D) d'une des asymptotes.

Soient I, N_a, N_b, N_c les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits. En vertu d'une propriété bien connue et d'ailleurs presque évidente, I est l'orthocentre du triangle $N_aN_bN_c$. Par les sommets A, B, C du triangle orthocentrique,

(*) *Nouvelles Annales*, t. XVIII, 1859. Question 475 : Construire une ellipse, connaissant une directrice et trois tangentes.

menons des parallèles et des perpendiculaires à la direction (D). Elles rencontreront les côtés opposés en six nouveaux points α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Cela posé, la propriété que j'ai à signaler est la suivante:

L'hyperbole équilatère passant par le centre du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits renferme les milieux des six segments interceptés par chacun des côtés du triangle orthocentrique sur des parallèles aux deux directions rectangulaires des asymptotes menées par les sommets opposés.

Ce théorème peut s'énoncer encore autrement.

Si de chaque sommet d'un triangle ABC l'on mène des parallèles à deux directions fixes rectangulaires, les milieux des six segments et les quatre centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits se trouvent sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux deux directions données.

Ce qui précède renferme la solution du problème de la détermination d'une hyperbole équilatère passant par trois points et ayant ses asymptotes parallèles à deux directions données rectangulaires.

J'ignore si ces propriétés sont nouvelles.

Voici, d'ailleurs, l'élégante démonstration qui en a été donnée par M. E. Dewulf.

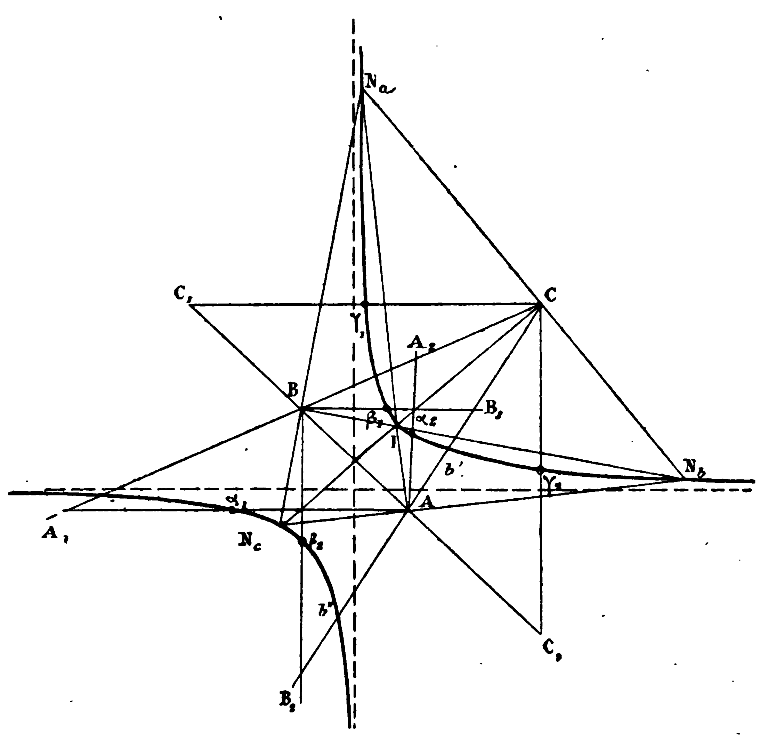
Soient BB_1 le segment arrêté au côté AC, β_1 le milieu de BB_1.

Le triangle ABC est le triangle conjugué commun à toutes les hyperboles équilatères du faisceau $N_aN_bN_cI$, puisque ABC est le triangle diagonal du quadrilatère $N_aN_bN_cI$.

Il en résulte que l'hyperbole équilatère du faisceau qui est déterminée par le point B_1 de AC est tangente en ce point B_1 à BB_1.

Considérons maintenant la droite indéfinie BB_1 comme une parallèle une des asymptotes d'une des courbes (C) du faisceau; elle rencontre (C) à l'infini, donc son second point d'intersection avec l'hyperbole est le point central de l'involution déterminée sur BB_1 par les courbes du faisceau, c'est-à-dire le point milieu des points doubles de cette involution. Or, ces points doubles sont le point B qui appartient à l'hyperbole équilatère, dégénérée en ses deux asymptotes N_aN_c, BN_b

et le point B_1, puisque l'hyperbole équilatère $N_aN_bN_cIB_1$ est tangente en B_1 à BB_1. Le point β_1 milieu de BB_1 est donc un point de la courbe.



Il résulte de là que si l'on joint le point B aux points d'intersection b', b'', de AC avec l'hyperbole équilatère ($N_aN_bN_cI$, BB_1), c'est-à-dire dont une asymptote est parallèle à BB_1, l'on a les tangentes à l'hyperbole équilatère en ces points b', b''. Cette conséquence paraît digne de remarque.

La même conclusion s'applique aux lignes qui joignent C aux points d'intersection avec AB, et A aux points d'intersection avec BC.

9. — Il serait probablement facile de déterminer d'autres troupes de points du plan situés sur une même hyperbole

équilatère, cette courbe jouant un rôle semblable à celui de la circonférence.

Pour en donner une idée, il suffira de signaler une conséquence très simple de la situation de l'orthocentre H' du triangle ABC sur l'hyperbole équilatère circonscrite à ce triangle.

Nous avons vu, en effet, que cette hyperbole passe par le point N, autrement dit, que la circonférence circonscrite à ce même triangle rencontre l'hyperbole équilatère en un quatrième point qui est diamétralement opposé, sur cette conique, à l'orthocentre du triangle. Or, le quadrilatère ABCN donne quatre triangles ABC, ABN, BCN, ACN, et quatre orthocentres H', H_1, H_2, H_3. et quatre points N, N_1, N_2, N_3, diamétralement opposés aux précédents par rapport au centre W de l'hyperbole. Voilà donc un groupe de huit points situés sur une même hyperbole équilatère circonscrite à un quadrilatère inscriptible.

On en déduit cette propriété, sans doute connue ou déjà remarquée, du quadrilatère inscriptible :

Les lignes qui joignent un sommet d'un quadrilatère inscriptible à l'orthocentre du triangle des trois autres sommets passent par un même point, qui est le centre commun de ces quatre segments et de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère donné.

Au reste, et en résumé, la géométrie de l'hyperbole équilatère a fixé depuis longtemps l'attention des géomètres en raison de l'analogie des propriétés de cette courbe avec les propriétés du cercle. Pour ne citer que les travaux les plus connus, il suffira de signaler ceux de Plücker, Poncelet et Brianchon, Bobillier, Mention, P. Serret.

(A suivre.)

SUR LES PODAIRES

PRINCIPE D'UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. — Le but de la présente Note est de faire ressortir ce point, à savoir que la considération des *podaires* renferme le

principe d'une méthode de transformation géométrique susceptible d'assez nombreuses applications et qui est à la portée des élèves de Mathématiques élémentaires.

2. — Si d'un point O on abaisse des perpendiculaires sur les divers plans tangents à une surface S, le lieu des pieds de ces perpendiculaires est une surface S'.

La surface S' est dite *podaire* de la surface S relativement au point O, et la surface S *antipodaire* de la surface S', relativement au même point.

Joignons le point O à trois points M, M', M'' infiniment voisins sur la surface S, et décrivons des sphères sur OM, OM' et OM'' comme diamètres. Ces trois sphères se coupent, en outre du point O, en un point H, symétrique du point O par rapport à leur plan diamétral commun ; le point H est, par suite, le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan MM'M'', qui est, à la limite, tangent à la surface S; ce point H appartient donc à la podaire de la surface S relativement au point O, et on peut énoncer les théorèmes suivants :

La podaire d'une surface S *relativement à un point* O *est l'enveloppe des sphères qui ont pour diamètres les rayons vecteurs joignant le point* O *aux divers points de la surface* S.

L'antipodaire d'une surface S *relativement à un point* O *est le lieu des points diamétralement opposés au point* O *dans les sphères qui passent par ce point et sont tangentes à la surface* S.

3. — Considérons une surface S et sa podaire S' relativement à un point O. Prenons les inverses Σ et Σ' de ces surfaces par rapport au point O.

Soit T un plan tangent à S; la sphère θ, inverse de ce plan, passe par le point O et est tangente à Σ. Le pied A de la perpendiculaire abaissée de O sur P appartient à la surface S'; par suite, l'inverse de ce point, qui est diamétralement opposé au point O dans la sphère θ, appartient à la surface Σ'.

La surface Σ' est donc, en vertu du second des théorèmes précédents, l'antipodaire de Σ relativement au point O' et l'on peut dire que

Relativement à un point quelconque, l'inverse de la podaire d'une surface est l'antipodaire de l'inverse de cette surface.

Comme corollaire, on voit que

La podaire et l'antipodaire d'une anallagmatique, relativement à l'un de ses pôles principaux, sont inverses par rapport à ce pôle.

4. — Mais venons à l'objet principal de cette Note ; nous voyons que la considération des podaires conduit à la méthode de transformation suivante :

Étant donné un point fixe O, *prenons un point quelconque* M *dans l'espace et décrivons sur* OM *comme diamètre une sphère; cette sphère sera dite transformée podaire du point* M *relativement au point* O.

L'enveloppe des sphères transformées podaires de tous les points d'une surface est la transformée podaire de cette surface.

On a, dans le plan, la même définition en remplaçant respectivement les termes de surface et de sphère par ceux de courbe et de cercle.

5. — La transformée podaire d'un plan dans l'espace, ou d'une droite dans le plan, est un point qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle de la transformation sur ce plan ou sur cette droite.

Quelques remarques évidentes, jointes aux notions qui précèdent, constituent tout le procédé de transformation que nous avons en vue. Nous allons maintenant consigner ces remarques en les appuyant de quelques exemples très simples. (*A suivre.*)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Henry Bourget**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Clermont-Ferrand.

1. — Dans la théorie des coniques, on cherche les asymptotes de ces courbes en les considérant comme des diamètres coïncidant avec leurs conjugués. On peut se demander s'il est possible d'étendre ces considérations à la recherche des asymptotes dans les courbes planes de degrés

supérieurs; c'est à cette question que nous allons essayer de répondre dans cette note.

2. — Résolvons d'abord le problème suivant, qui peut être regardé, à un certain point de vue, comme la généralisation de la théorie des diamètres dans les coniques.

Étant données une courbe algébrique (c) *de degré* m *et une direction* d *dans son plan, on prend sur chacune des parallèles à* d *le centre des moyennes distances des* m *points d'intersection de cette droite avec la courbe. Lieu de ces points.*

Il est évident, *à priori*, que ce lieu est une droite qu'on peut nommer *le diamètre conjugué* de la direction donnée *d*. Nous rappellerons ici comment on trouve l'équation de cette droite.

Soit $f(x, y) = 0$ (1), l'équation de la courbe (c) rapportée à des axes quelconques; soit, de plus, $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho$, la direction donnée d. La parallèle à d menée par un point de coordonnées x_0 et y_0 et faisant partie du lieu sera

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho.$$

Les valeurs de ρ donnant les points d'intersection de la droite ci-dessus et de la courbe sont les racines de l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = \varphi_m(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) \\ + \varphi_{m-1}(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) + \ldots = 0. \qquad (1)$$

En développant suivant la formule de Taylor, en considérant x_0, y_0 comme des accroissements, on obtient

$$(1) \quad f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = \rho^m\varphi_m(\alpha, \beta) + \rho^{m-1}[x_0\varphi'_{m,x}(\alpha, \beta) \\ + y_0\varphi'_{m,y}(\alpha, \beta)] \\ + \rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\alpha, \beta) \quad + \ldots \\ + \ldots$$

D'autre part, puisque le point de coordonnées (x_0, y_0) fait partie du lieu, on a, d'après l'énoncé, en désignant par ρ_1, ρ_2, ... ρ_m les m racines de l'équation (1) et par ρ, le ρ d'un point de lieu :

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m}{m},$$

qui devient en prenant (x_0, y_0) comme origine des ρ,

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m = 0;$$

par suite, nous aurons l'équation du lieu en exprimant que la somme des racines de l'équation (1) en ρ est nulle, ce qui donne pour équation de ce lieu

$$x\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta) + y\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta) + \varphi_{m-1}(\alpha,\beta) = 0,$$

ce qui définit bien une droite.

3. — Ceci posé, considérons une courbe plane (c) de degré m et soit d l'une de ses asymptotes.

Une parallèle quelconque s à d coupe (c) en m points dont l'un est le point de contact de l'asymptote avec la courbe; et le centre des moyennes distances de ces m points est précisément ce point de contact. Dans le cas où la droite s se confond avec d, le centre des moyennes distances devient indéterminé sur d et le lieu précédent est l'asymptote elle-même. Comme, d'autre part, l'équation de ce lieu est

$$x\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta) + y\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta) + \varphi_{m-1}(\alpha,\beta) = 0,$$

nous concluons que cette équation, dans laquelle (α, β) est une solution de l'équation $\varphi_m(\alpha,\beta) = 0$, définit l'asymptote de la courbe (c), parallèle à cette direction.

Nous retrouvons ainsi les résultats auxquels on est conduit par la théorie des tangentes.

Remarque. — Ajoutons que la même méthode s'applique à la recherche des plans asymptotiques d'une surface.

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 36.)

Théorème. — *Lorsque deux polynômes entiers* U, V *sont premiers entre eux, les polynômes* U^p, V^p *sont aussi premiers entre eux;* p *désignant un nombre entier et positif.*

Puisque U et V sont premiers entre eux, nous avons

$$\mu U + \nu V = 1.$$

Élevons les deux membres de cette identité à la puissance p, les principes de la multiplication algébrique prouvent que nous avons

$$\mu^p U^p + \nu^p V^p + UVW = 1, \qquad (1)$$

W désignant une forme entière.

Cela posé, soit D le plus grand commun diviseur de U^p et de V^p ; je dis que D est premier avec U.

En effet, si U et D admettaient un diviseur Δ, V^p étant divisible par D admettrait, lui aussi, ce diviseur Δ et le premier membre de (1) serait divisible par Δ; hypothèse évidemment inadmissible.

Nous voyons de même que V et D sont premiers entre eux.

D'après cela, D divisant U^p, mais étant premier avec U, doit diviser U^{p-1}; nous reconnaissons de même que D divise V^{p-1}. Ainsi, D est un diviseur commun à U^{p-1} et à V^{p-1}.

En poursuivant ce raisonnement, nous démontrerons finalement que D divise U et V; et comme U et V sont premiers entre eux, D n'est pas un diviseur algébrique.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

8. — *Soit :*

$$x^3 + px + q = 0,$$

une équation donnée; a, b, c, *désignant ses trois racines, on propose de calculer* U,

$$U = \Sigma \frac{a}{1 + a}.$$

Transformons l'équation donnée au moyen de la formule

$$y = \frac{x}{1 + x};$$

nous trouvons immédiatement :

$$y^3(1 + p - q) + y^2(3q - 2p) + y(p - 3q) + q = 0. \quad (1)$$

Cette équation donne, entre autres choses,

$$\Sigma \frac{a}{1+a} = \frac{2p-3q}{p+1-q}.$$

Nous donnons, plus loin, une généralisation de cet exercice.

9. — *Les conditions et les notations de l'exercice précédent subsistant, trouver* U,

$$U = \Sigma \frac{a^2}{(1+a)^2}.$$

Posons

$$y = \frac{x}{1+x},$$

puis cherchons l'équation en y. De la relation (1) on déduit la somme des carrés des racines, en appliquant la formule connue :

$$S_2 = \frac{A_1^2 - 2A_0A_2}{A_0^2}.$$

Le résultat est donc

$$(p+1-q)^2U = (3q-2p)^2 - 2(p+1-q)(p-3q).$$

On observera que la méthode que nous indiquons ici s'applique avec avantage aux fonctions symétriques de la forme $\Sigma \frac{a^p}{(1+a)^p}$.

10. — *Résoudre l'équation*

$$(x+aj)^3 + (x+aj^2)^3 = 0, \qquad (1)$$

j *et* j^2 *désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.*

On sait que l'on a

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A+Bj)(A+Bj^2).$$

En appliquant cette identité au premier membre de (1), et en tenant compte des égalités :

$$j^3 = 1, \qquad j + j^2 = -1,$$

on trouve d'abord

$$(2x-a)(x+a)(1+j)(x+xj^2+2aj) = 0,$$

et, finalement,

$$(2x-a)(x+a)(x-2a) = 0.$$

11. — *Soit l'expression* $(t + \theta)^m$*; on y remplace successivement* θ *par les* m *racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0, \qquad (1)$$

démontrer que la somme U *des résultats ainsi obtenus est égale à*

$$m(t^m + 1).$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, les m racines de (1); en désignant par S_p la somme des puissances p de ces racines, les formules de Newton, appliquées à l'équation (1), prouvent que l'on a

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_{m-1} = 0,$$

et

$$S_m = m;$$

et, d'après cela, l'égalité

$$U = (t + \alpha_1)^m + (t + \alpha_2)^m + \ldots + (t + \alpha_m)^m$$
$$= mt^m + C_m^1 t^{m-1} S_1 + C_m^2 t^{m-2} S_2 + \ldots + C_m^{m-1} t S_{m-1} + S_m,$$

donne bien

$$U = m\,(t^m + 1).$$

(A suivre.)

QUESTION 115

Solution par M. Taratte, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Construire la courbe représentée par l'équation :

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0.$$

(E. V.)

L'équation peut se mettre sous la forme

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2x^2y^2 = 0.$$

La courbe se compose donc des deux coniques dont les équations sont

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} - 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} - 1 = 0.$$

Ce sont deux ellipses égales ayant pour axes les bissectrices des angles des axes de coordonnées et coupant ces axes de coordonnées à une distance de l'origine égale à l'unité. Le carré du demi grand axe est $2 + \sqrt{2}$, le carré

du petit axe est $2 - \sqrt{2}$, les foyers sont à une distance du centre dont le carré est $2\sqrt{2}$.

Même solution par M. Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay), et M. Léon Clément, élève au lycée de Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

138. — Trouver et discuter la courbe enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes.

(Hadamard.)

N. B. — Cette courbe est une courbe du quatrième degré qui a une tangente double à l'infini et trois points de rebroussement. Ces trois points sont les sommets d'un des triangles maxima inscrits dans une conique homothétique et concentrique au lieu des centres des coniques données.

Ce dernier lieu est d'ailleurs tritangent à la courbe. Les diamètres des points de contact sont les tangentes de rebroussement et, en même temps, des diamètres de la quartique.

Si le faisceau de coniques se compose d'hyperboles équilatères, la courbe devient une hypocycloïde à trois rebroussements (d'où l'on conclut que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde est un cercle).

139. — Si d'un point P on mène des tangentes à des cercles ayant même axe radical, on sait que le lieu des points de contact est une cubique circulaire. Faire voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une cubique circulaire puisse être ainsi engendrée est que les asymptotes imaginaires se rencontrent sur la courbe. *(E. Cr.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 4870-5.

SUR LES TANGENTES COMMUNES

A UNE ELLIPSE ET A UN CERCLE

Par M. **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

1. — Pour que deux droites rencontrent une conique en quatre points d'une même circonférence de cercle, il faut et il suffit qu'elles fassent des angles égaux, en sens contraire, avec un axe de la conique.

Ce théorème bien connu a pour corrélatif le suivant, dont lerôle, nous semble-t-il, n'a pas été suffisamment apprécié :

Pour que les tangentes menées de deux points à une conique enveloppent un même cercle, la condition nécessaire et suffisante est que ces points soient sur une même conique homofocale à la première.

Voici une démonstration analytique de cette élégante proposition due à Chasles (*Comptes rendus*, t. XVII). Si l'on prend pour coordonnées tangentielles les réciproques des segments compris sur les axes d'une ellipse E entre le centre et une droite quelconque, l'équation de l'ellipse est :

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

et celle d'un cercle de centre I (x_0, y_0) est

$$(x_0u + y_0v - 1)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0. \qquad (1)$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de deux sommets opposés M_1, M_2 du quadrilatère circonscrit au cercle et à l'ellipse; l'équation du cercle pourra aussi prendre la forme

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 - K(x_1u + y_1v - 1)(x_2u + y_2v - 1) = 0. \quad (2)$$

Si l'on écrit que les équations (1) et (2), ne diffèrent que par un facteur constant l, on trouve l'identité

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 + lR^2(u^2 + v^2) \qquad (3)$$
$$= (x_0u + y_0v - 1)^2 + Kl(x_1u + y_1v - 1)(x_2u + y_2v - 1).$$

Les deux membres de (3), égalés à zéro, doivent représenter la même courbe. Le premier membre indique une conique ayant pour axes $2\sqrt{a^2 + lR^2}$, $2\sqrt{b^2 + lR^2}$, et qui, par suite, est homofocale à l'ellipse proposée; d'après la forme du deuxième membre, la courbe touche les droites

IM_1, IM_2, aux points M_1, M_2. Le théorème de Chasles est ainsi démontré.

Réciproquement, *étant données deux coniques homofocales, si de deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, les quatre droites ainsi obtenues enveloppent un même cercle.*

2. — La proposition suivante résulte immédiatement de ce qui précède :

Si l'on considère tous les cercles touchant deux tangentes fixes M_1N, M_1N' *menées à une ellipse* E, *le lieu du point d'intersection* M_2 *des deux autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à l'ellipse, se compose des deux coniques homofocales à* E *et passant par* M_1.

3. — L'hyperbole homofocale menée par M_1 rencontre E en quatre points P, P′, P″, P‴. Ces points sont les points de contact de cercles touchant l'ellipse E et les droites M_1N, M_1N'; car ils correspondent à des cercles ayant avec E deux tangentes communes confondues.

Il existe une infinité de cercles touchant E en P; les tangentes communes à l'un de ces cercles et à E se coupent sur l'hyperbole. Donc, *si l'on construit les cercles touchant une ellipse* E *en un point donné* P, *le lieu du point de concours des tangentes communes à l'un de ces cercles et à l'ellipse est l'hyperbole homofocale passant par* P. (Concours général de 1844.)

4. — Soit M_1QQ' le triangle circonscrit à E et à l'un des cercles touchant E en P. Les points Q, Q′ peuvent être considérés comme deux sommets opposés d'un quadrilatère M_1QPQ' circonscrit à l'ellipse E et au cercle; donc ils se trouvent sur une conique homofocale à E.

De là on conclut cet autre énoncé de la question du Concours de 1844 : *Une tangente fixe au point* P *d'une ellipse* E *est rencontrée par une conique homofocale à* E *en deux points* Q, Q′ *tels que les autres tangentes menées de* Q, Q′ *à* E *se coupent sur l'hyperbole homofocale à* E *qui passe par* P.

5. — Soit ABC un triangle formé par trois tangentes à l'ellipse E, et soient t, t', t'', t''' les quatrièmes tangentes communes à E et à l'un des quatre cercles inscrits à ABC. D'après le théorème du § 1, les points α, α', α'', α''', où la droite BC est coupée respectivement par t, t', t'', t''', sont,

deux sur l'ellipse homofocale à E, et les deux autres sur l'hyperbole homofocale passant par A. Donc, d'après le théorème du § 4, les lignes t, t', t'', t''' forment un quadrilatère circonscrit à E et tel que deux des sommets opposés sont situés sur l'hyperbole homofocale passant par le point de contact de BC avec E; ce quadrilatère est donc circonscriptible à un cercle.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème assez curieux :

Étant donnés une ellipse E, *un triangle circonscrit* ABC, *et les quatre cercles inscrits à ce triangle, les quatrièmes tangentes communes à* E *et à l'un des cercles enveloppent un même cinquième cercle, et forment un quadrilatère complet tel que les trois couples de sommets opposés se trouvent respectivement sur les trois hyperboles homofocales à* E *qui passent par les points de contact de* E *avec les côtés du triangle* ABC.

Nous ne nous arrêterons pas à d'autres propriétés de la figure précédente.

6. — Considérons maintenant le cercle osculateur au point P de l'ellipse E. Trois des tangentes communes à ce cercle et à l'ellipse sont confondues avec la tangente menée par P; soit QRR′ la quatrième tangente commune touchant l'ellipse en R et le cercle en R′, et rencontrant la tangente menée par P au point Q. Les points Q et P peuvent être regardés comme les sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à l'ellipse et au cercle; donc ils sont sur une même hyperbole homofocale à E. Le centre I du cercle se trouve sur la normale à E par P, et sur la bissectrice de l'angle RAP, bissectrice qui est tangente à l'hyperbole.

Donc : *le centre du cercle osculateur en un point* P *d'une ellipse est le pôle de la tangente commune par* P, *par rapport à l'hyperbole homofocale à* E *qui passe par* P; *cette tangente et l'autre tangente commune au cercle et à l'ellipse se coupent sur la même hyperbole.*

7. — La question que nous venons de traiter conduit à plusieurs problèmes intéressants que nous nous contenterons d'énoncer :

a. Lieu du point Q où une tangente à l'ellipse rencontre l'hyperbole homofocale qui passe par le point de contact;

b. Lieu du milieu de la droite PQ;
c. Enveloppe de la droite QI;
d. — — PR;
e. — — PR′;
f. Lieu du point R′;
g. Combien de cercles osculateurs touchent une même tangente RQ menée à l'ellipse?

PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS

ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 58.)

---

10. — Après l'hyperbole équilatère passant par plusieurs points remarquables du plan, la courbe la plus intéressante à étudier est la parabole. Mais ici, l'intérêt du problème s'accentue davantage, par suite d'une circonstance curieuse et pour ainsi dire inattendue.

Nous arrivons, en effet, à la notion de deux groupes fort remarquables de trois paraboles, ayant deux à deux pour foyers communs trois points du cercle de Brocard. En outre, les paraboles d'un de ces groupes sont doublement tangentes à deux droites rectangulaires fixes, que l'on peut déterminer par une construction graphique.

Ces six paraboles et leurs propriétés focales ont été étudiées pour la première fois par M. A. Artzt, dans un Programme scolaire du Gymnase de Recklinghausen, édité au commencement de l'année 1884, et intitulé : *Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreicks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardschen Kreises.*

Mais elles ont été rencontrées, indépendamment de ces recherches, par d'autres géomètres, et, circonstance assez singulière, les paraboles d'un groupe ont été étudiées par MM. E. Lemoine et R. Tucker, tandis que j'ai remarqué les paraboles de l'autre groupe en établissant, tout d'abord, la notion et l'existence des deux tangentes rectangulaires communes.

Le travail de M. A. Artzt établit, par conséquent, la liaison entre des recherches absolument indépendantes, et dont les résultats se complètent mutuellement.

Enfin, il paraît utile d'observer que ces résultats se présentent de la façon la plus naturelle, comme conséquence de certaines propriétés très simples, rencontrées déjà au cours de ces recherches. Les développements qui vont suivre pourront donc donner un nouvel et intéressant exemple de discussion d'un simple problème de la Géométrie du Triangle.

11. — Si, sur les côtés d'un triangle ABC, l'on construit intérieurement des triangles isoscèles semblables, ayant par conséquent le même angle φ à la base, les sommets A'B'C' de ces triangles déterminent un triangle A'B'C' dont le centre de gravité est le même que celui du triangle donné (voir *Nouv. Corresp. Math.*, t. V, 1879, p. 425-429; *Journal de Math. élém.* 1883, p. 97-98; *Congrès d'Alger* 1881, §§ 3 et 15; *Zeitschrift*, questions 195, 196, 201, t. XIII, 1882, p. 33 et 357-360). Cette proposition est d'ailleurs un cas particulier d'un théorème plus général : Si sur les côtés d'un triangle on construit des triangles semblables, le triangle des sommets a même centre de gravité que le triangle proposé. (J. Neuberg et Laisant.) Dans le cas des triangles isoscèles semblables, les lignes AA', BB', CC' concourent en un point M dont le lieu est une conique ayant pour équation

$$\frac{\sin(A - B)}{\gamma} + \frac{\sin(C - A)}{\beta} + \frac{\sin(B - C)}{\alpha} = 0$$

(Kiepert, *Nouv. Annales*, t. VIII, 1869, p. 40-42).

Le triangle A'B'C' ne peut se réduire à un point; mais ses trois sommets peuvent se trouver en ligne droite *(N. C. M. loc. cit.)*.

Cette droite (T) correspond à un angle φ donné par la relation

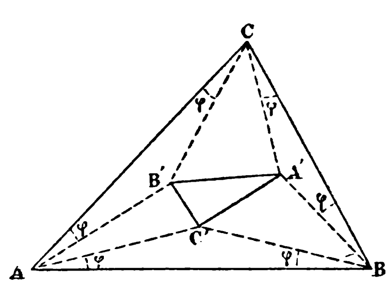
$$\sin(2\varphi + \alpha) = 2 \sin \alpha$$

ou

$$\cot^2 \varphi - 2 \cot \alpha \cot \varphi + 3 = 0$$

avec

$$\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$$



(loc. cit.) et par conséquent, elle passe par le point E, centre de gravité.

Il est donc possible de la déterminer complètement par une première construction graphique *(N. C. M., loc. cit.)*.

Mais nous allons aussi lui reconnaître, très simplement, d'autres propriétés.

En effet, considérons en particulier la série des sommets A′ et B′. Ces points se trouvent sur les droites OA′, OB′ perpendiculaires aux milieux des côtés BC, AC du triangle, et l'enveloppe des droites A′B′ est, en vertu de propriétés bien connues, une parabole tangente aux droites OA′, OB′, ainsi qu'aux deux bissectrices de l'angle C et de son supplément, car ces deux bissectrices sont évidemment deux positions particulières de la droite A′B′, l'une correspondant à l'angle $\varphi = \frac{C}{2}$, l'autre à l'angle $\varphi = \frac{\pi + C}{2}$.

On obtiendrait, de la même façon, deux autres paraboles tangentes à des droites analogues.

Il y aurait à signaler également une cinquième tangente, la ligne qui joint les milieux des côtés du triangle qui comprennent l'angle considéré. Cette ligne correspond à l'angle $\varphi = 0$.

Mais il est bien clair que la tangente menée par le point E à chaque parabole doit coïncider avec la droite (T) définie précédemment.

On en conclut donc ce théorème, qui paraît curieux :

Les trois paraboles tangentes aux trois groupes de quatre droites constitués par les deux bissectrices de chaque angle d'un triangle et les perpendiculaires aux milieux des côtés qui comprennent cet angle, admettent une tangente commune (T) *qui passe par le centre de gravité* E *du triangle et rencontre les bissectrices intérieures en trois points* A′, B′, C′, *sommets de triangles isoscèles semblables* BA′C, AB′C, AC′B, *dont l'angle* φ *à la base est déterminée par la relation*

$$\sin(2\varphi + \alpha) = 2 \sin \alpha,$$

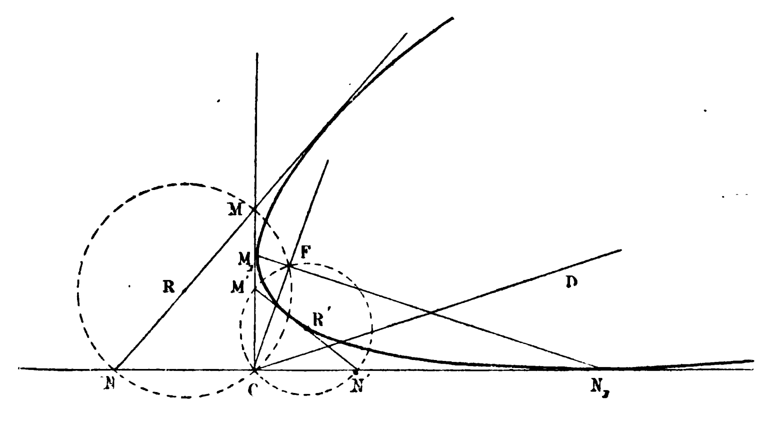
l'angle α *vérifiant l'égalité*

$$\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C.$$

12. — Ainsi, nous connaissons, dans chaque parabole, six tangentes, dont deux rectangulaires, ou bien quatre tangentes et un point de la directrice.

On peut donc se proposer d'achever la détermination de ces coniques, en éliminant, bien entendu, certaines conditions évidemment surabondantes.

La tangente (T) menée par le point E peut être déterminée, comme nous l'avons dit, par une construction graphique indépendante de la notion des paraboles. Mais il est également possible de l'obtenir en se donnant seulement les quatre lignes



OA′, OB′, CI, CI′, que l'on sait être tangentes à une parabole et qui suffisent, — propriété connue, — pour déterminer entièrement cette conique. (Cremona. *Trad*, Dewulf, p. 114.)

Pour résoudre ce problème, nous pourrons, par exemple, nous appuyer sur cette propriété de la parabole :

La circonférence circonscrite au triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer de cette conique (Poncelet, *Annales de Gergonne*, t. VIII, 1817 ; et *Appl. d'Analyse et de Géom.* 1864, p. 461-462) (Théorème de Lambert, *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, sect. 1, d'après Poncelet; *Traité des Propr. proj.* 1822, p. 269-270).

Dans le cas particulier que nous étudions ici, l'un des angles des tangentes est droit.

Soient donc M_1,N_1, M'_1,N'_1 les points où les deux tangentes rectangulaires CM, CN sont rencontrées par les deux autres tangentes MN, M'N'. On prendra les milieux R, R' des deux segments MN, M'N'. Ce seront les centres des circonférences passant par le point C et par le foyer cherché F. Joignant FC, l'on aura une parallèle CD à l'axe de la parabole en construisant l'angle N'CD égal à l'angle FCM, propriété bien connue aussi (Poncelet, *loc. cit.*). De plus, en joignant CF et menant par F une perpendiculaire à CF, cette droite M_1N_1 rencontrera CM et CN aux deux points M_1 et N_1 de contact des tangentes rectangulaires (Poncelet, *Appl. d'Analyse et de Géom.* 1862, p. 54).

Enfin une parallèle à FD menée par F et une perpendiculaire à FD menée par C représenteront l'axe et la directrice de la parabole.

Le sommet et la tangente au sommet s'en déduisent immédiatement. *(A suivre.)*

SUR LES PODAIRES

PRINCIPE D'UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Suite*, voir p. 64).

6. — Prenons d'abord les propriétés linéaires; leur transformation repose sur cette remarque, à savoir que :

La distance des centres des sphères (ou cercles) transformées

podaires de deux points est égale à la moitié de la distance de ces deux points.

En particulier, si l'on considère un cercle C et son centre c, on voit que les centres des cercles transformés podaires des points de C sont situés sur un cercle qui a pour centre le centre du cercle transformé podaire de c. Or, le cercle podaire de tout point de C est tangent à la podaire de C, et l'on sait que la podaire de C est un limaçon de Pascal. On peut donc énoncer ce théorème :

Si un cercle variable passe par un point fixe et que son centre décrive un cercle, ce cercle variable a pour enveloppe un limaçon de Pascal.

7. — La transformation des propriétés angulaires repose sur les deux remarques suivantes :

1° *L'angle sous lequel se coupent les sphères (ou cercles) transformées podaires de deux points est égal à l'angle sous lequel on voit la distance de ces deux points du pôle de la transformation;*

2° *L'angle sous lequel on voit la distance des points transformés podaires de deux plans (ou de deux droites) est égal à l'angle de ces plans (ou de ces droites).*

Comme exemple, prenons cette proposition : si les côtés d'un angle constant tournent autour de deux points, la bissectrice de cet angle tourne aussi autour d'un point.

Transformant par podaires et appliquant la seconde des deux remarques qui précèdent, on a ce théorème :

Si deux points A *et* B *se déplacent respectivement sur deux cercles de manière que leur distance soit vue de l'un des points communs* O *à ces deux cercles sous un angle constant, le milieu de l'arc* AB *sur le cercle circonscrit au triangle* AOB *décrit aussi un cercle passant par le point* O.

8. — Les propriétés barycentriques se transforment aussi très aisément, si l'on observe que :

Le centre de gravité des centres des sphères podaires d'un système de points est le centre de la sphère podaire du centre de gravité de ces points.

En particulier, si ce centre de gravité est fixe, le centre de gravité des centres des sphères podaires est, lui aussi, fixe.

Prenons comme exemple ce théorème : le centre de gravité des points de contact d'une surface S avec ses plans tangents parallèles à un plan donné est fixe quel que soit ce plan.

Soit S' la podaire de S relativement au point O. Les plans tangents à S parallèles ont pour podaires des points de S', en ligne droite avec le point O ; les points de contact de ces plans tangents ont pour podaires les sphères tangentes à S' aux points dont il vient d'être parlé, et passant par le point O; le centre de gravité des centres de ces sphères sera fixe, en vertu de la remarque précédente. Comme d'ailleurs on peut disposer de la surface S pour que S' soit une surface quelconque donnée, on a ce théorème, énoncé par nous dans une note présentée à l'Académie des sciences (*).

Si une droite variable passant par un point fixe O *coupe une surface algébrique donnée aux points* A_1, A_2, ... A_p, *le centre de gravité des centres des sphères qui passent par le point* O *et qui touchent la surface donnée respectivement aux points* $A_1, A_2, \ldots A_p$, *est un point fixe.*

9. — Cette manière d'envisager les podaires a encore un autre intérêt. En effet, si nous appelons podaire d'une courbe gauche le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à cette courbe, la courbe ainsi obtenue n'a aucun rapport avec la surface podaire d'une surface passant par la courbe gauche donnée, tandis que, d'après la définition que nous avons adoptée, la podaire de la courbe gauche est la surface enveloppe des sphères qui ont pour diamètres les vecteurs des divers points de cette courbe ; cette surface est tangente à la surface podaire d'une surface quelconque passant par la courbe gauche donnée. On peut l'engendrer d'une autre manière, en abaissant du point fixe des perpendiculaires sur les tangentes de la courbe gauche et en décrivant sur ces droites comme diamètres des cercles dans des plans perpendiculaires aux tangentes correspondantes; la surface, lieu de ces cercles, est la podaire en question.

(*) Séance du 10 novembre 1884. Voir *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 744.

INDICATIONS SUR UN POINT

DE LA

THÉORIE DES SURFACES HOMOFOCALES

Par M. G. Kœnigs.

1. — Lorsque l'on se propose d'étendre à l'espace les propriétés du cercle envisagé comme une conique, on trouve deux voies pour développer cette extension. La première consiste à envisager des sphères, la seconde, des surfaces du second degré de révolution.

Prenons pour exemple la propriété suivante :

Les quatre points où le côté BC d'un triangle ABC est touché par les quatre cercles tangents à ses côtés, sont les sommets des deux coniques homofocales qui ont B et C pour foyers et qui passent par le sommet A.

Pour étendre cette propriété à l'espace, on pourra considérer des *sphères bi-tangentes* à un cône et tangentes à un plan, ou encore, des *surfaces de révolution* du second degré tangentes à un plan, et *circonscrites* à un cône.

Le résultat auquel on parvient a cela de remarquable qu'il est le même dans les deux cas ; car si l'on cherche le lieu des points de contact avec le plan, soit des sphères, soit des surfaces de révolution, on trouve trois mêmes coniques, que l'on obtient en prenant les coniques principales dans le plan considéré π des trois surfaces homofocales qui passent par le sommet du cône, et ont pour focale la trace de ce cône sur le plan π.

2. — Cette proposition peut d'ailleurs être considérée comme un cas particulier d'une proposition très étendue de géométrie projective.

Considérons en effet deux surfaces du second ordre quelconques A et B, et cherchons quelles relations doivent exister entre un plan α et une droite Δ pour qu'il existe une troisième surface du second degré tangente à la surface A aux deux points où elle est percée par Δ, et circonscrite à

la surface B tout du long de son intersection avec le plan α. Voici les conditions que l'on trouve.

On sait que par toute courbe commune à deux surfaces A et B du second ordre on peut généralement faire passer quatre cônes du second degré C_1, C_2, C_3, C_4, de même que par les points communs à deux coniques il passe trois systèmes de deux droites. Les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles α et Δ sont assujettis consistent en ce que ce plan et cette droite doivent se couper en l'un quelconque des sommets des quatre cônes C_1, C_2, C_3, C_4; et de plus ils doivent être conjugués par rapport à celui de ces cônes dont ils contiennent le sommet.

Mais on aperçoit immédiatement que les quadriques A et B figurent symétriquement dans l'énoncé des conditions, en sorte que s'il existe une surface du second ordre bi-tangente à A suivant Δ et circonscrite à B suivant α, il existe une autre surface du second degré bi-tangente à B suivant Δ et circonscrite suivant le plan α à la surface A.

3. — Si l'on cherche alors le lieu des points de contact avec un plan fixe π des surfaces du second ordre Σ tangentes à ce plan, bi-tangentes à A et circonscrites à B on trouve quatre coniques, que l'on retrouve encore en supposant que l'on assujettisse les surfaces Σ (toujours tangentes au plan π) à être bi-tangentes à B et circonscrites à A.

En effet, grâce au résultat précédemment énoncé, on trouve la construction suivante des quatre coniques en question, construction où les surfaces A et B figurent symétriquement.

Prenez la trace des surfaces A et B sur le plan π; appelez a et b ces deux coniques. Deux coniques sont toujours polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à quatre autres; soit p l'une de ces quatre coniques pour les coniques a et b; si l'on prend les coniques e_1, e_2, e_3, e_4 polaires réciproques par rapport à p des traces des cônes C_1, C_2, C_3, C_4 sur le plan π, on a précisément dans ces coniques e_1, e_2, e_3, e_4 le lieu des points de contact cherché. *(A suivre.)*

ÉQUATIONS DE LA LOXODROMIE

Par M. B..., licencié ès sciences mathématiques.

On sait que la *loxodromie* (*) est une courbe décrite sur une sphère et coupant tous les méridiens sous un angle constant.

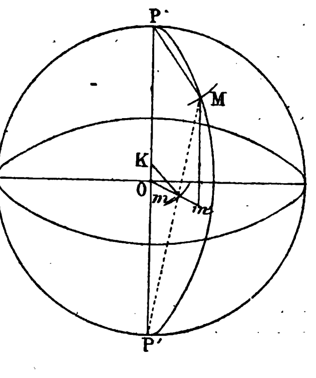
Soient M un point d'une telle courbe et m sa projection stéréographique.

On sait aussi que, dans ce genre de projections, les angles de deux courbes tracées sur la sphère se projettent en vraie grandeur.

D'après cela, la tangente en m à la projection stéréographique de la courbe forme avec le rayon vecteur om un angle constant. Il en résulte, qu'en projection, la courbe est une spirale logarithmique (**) dont l'équation est, en coordonnées polaires :

$$r = \mathrm{A}e^{n\theta}. \tag{1}$$

Il s'agit de déduire de là, l'équation de la projection orthogonale de la *loxodromie*.



Soit m' la projection orthogonale de M. Désignons om' par ρ, et cherchons une relation entre r et ρ. Les triangles OP'm, M$m'm$, étant semblables, on a :

$$\frac{mm'}{om} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{P}'m},$$

d'où
$$\frac{mm' + om}{om} = \frac{\mathrm{M}m + \mathrm{P}'m}{\mathrm{P}'m},$$

(*) D'après Frenet, *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*; 4e édition, p. 324, la loxodromie a été imaginée en 1492 par Nonius. Maupertuis s'est aussi occupé de cette courbe (*Mémoire sur la parallaxe de la Lune* et *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1744.)

(**) Cette remarque évidente a été faite par Halley ; M. Vannson l'a retrouvée (*Nouv. Annales*, 1861 ; pp. 31 et 226) ; aussi est-elle quelquefois donnée sous le nom de Théorème de Vannson. (V. *Exercices de Géométrie descriptive*, par F. I. C. ; 2e édition, A. Mame et Cie, p. 550.) G. L.

ou
$$\frac{\rho}{r} = \frac{P'M}{P'm}.$$

Menons mK parallèle à MP; on a, dans le triangle PMP', $\frac{P'M}{P'm} = \frac{P'\rho}{PK'}$. En tenant compte de l'égalité précédente, on a

donc $\frac{\rho}{r} = \frac{P'P}{PK'} = \frac{2a}{P'K}$ (en posant PP' $= 2a$).

Or, dans le triangle $P'mK$, rectangle en m, on a :
$$P'm^2 = r^2 + a^2 = P'K \times a.$$
Éliminant P'K entre cette égalité et la précédente on a :
$$\frac{\rho}{r} = \frac{2a^2}{a^2 + r^2}; \qquad (2)$$
éliminons r entre (1) et (2)
$$\rho = \frac{2a^2Ae^{n\theta}}{a^2 + A^2e^{2n\theta}},$$
d'où
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2A}e^{-n\theta} + \frac{A}{2a^2}e^{n\theta}. \qquad (3)$$
Prenons a pour la constante arbitraire A, et, pour $\rho = a$, supposons $\theta = 0$.

L'équation (3) devient :
$$\rho\,(e^{n\theta} + e^{-n\theta}) = 2a,$$
et, en coordonnées rectangulaires,
$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\left(e^{n \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}} + e^{-n \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}\right) = 2a.$$

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 68.)

LE RÉSULTANT

Nous abordons maintenant la définition et la recherche du résultant.

Définition. — Étant données deux formes entières et

homogènes $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, on appelle ***résultant*** de ces formes une fonction de leurs coefficients qui, égalée à zéro, exprime la condition nécessaire et suffisante pour que f et φ admettent un diviseur commun.

La fonction que nous venons de définir et que nous allons déterminer porte aussi le nom d'*éliminant*. Nous donnerons plus loin, quand nous traiterons de l'élimination, diverses méthodes pour trouver le résultant ou l'éliminant ; nous nous bornerons pour le moment à exposer la méthode qui est due à Euler.

RECHERCHE DU RÉSULTANT PAR LA MÉTHODE D'EULER

Posons

$$f(x, y) = A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} y + \dots + A_0 y^p,$$

et

$$\varphi(x, y) = B_q x^q + B_{q-1} x^{q-1} y + \dots + B_0 y^q.$$

Les formes f et φ admettent un diviseur commun, nous avons démontré tout à l'heure l'existence de deux polynômes μ, ν,

$$\mu = \beta_p x^{p-1} + \beta_{p-1} x^{p-2} y + \dots + \beta_1 y^{p-1},$$
$$\nu = \alpha_q x^{q-1} + \alpha_{q-1} x^{q-2} y + \dots + \alpha_1 y^{q-1},$$

qui vérifient l'identité

$$\varphi\mu + \nu f = 0 \qquad (1)$$

Réciproquement, si cette identité a lieu, nous savons que f et φ admettent un diviseur commun.

Égalons à zéro, dans (1), les coefficients des termes y^{p+q-1}, xy^{p+q-2}, $\dots x^{p+q-1}$ et nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll}
A_0\alpha_1 & + B_0\beta_1 & = 0, \\
A_1\alpha_1 + A_0\alpha_2 & + B_1\beta_1 + B_0\beta_2 & = 0, \\
A_2\alpha_1 + A_1\alpha_2 + A_0\alpha_3 & + B_2\beta_1 + B_1\beta_2 + B_0\beta_3 & = 0, \\
\dots\dots\dots & & \\
A_{q-1}\alpha_1 + \dots + A_0\alpha_q & + B_{q-1}\beta_1 + \dots + B_0\beta_q & = 0, \\
A_q\alpha_1 + \dots + A_1\alpha_q & + B_q\beta_1 + \dots & = 0, \\
\dots\dots\dots & & \\
A_p\alpha_q & + B_q\beta_p & = 0.
\end{array}$$

Ces égalités constituent un système de $p + q$, équations linéaires et homogènes qui sont vérifiées par une solution

non nulle. Le déterminant Δ de ces équations, égalé à zéro, donne donc la condition nécessaire et suffisante pour que les formes considérées f et φ admettent un diviseur commun.

Ce déterminant Δ peut s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & \dots & A_p & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & A_0 & A_1 & \dots & A_p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & A_0 & A_1 & \dots & \dots & A_p \\ B_0 & B_1 & \dots & B_q & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & B_0 & B_1 & \dots & B_q & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B_0 & B_1 & \dots & B_q \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant donne lieu aux remarques suivantes :

1° Il est d'ordre $(p + q)$, et ses éléments sont les lettres A et B, coefficients des équations proposées;

2° Les q premières lignes renferment les seules lettres A, coefficients de l'équation qui est du degré p; et les p lignes suivantes les seules lettres B, coefficients de l'équation qui est du degré q;

3° Le terme diagonal est $(A_0)^q\ (B_q)^p$.

Si l'on observe enfin que dans un terme quelconque de Δ toutes les lignes doivent être représentées, on peut encore conclure, du résultat précédent, la propriété suivante:

Théorème. — *Le résultant est homogène et du degré* p *par rapport aux coefficients* B *de la forme* $\varphi(x, y)$; *homogène et du degré* q, *par rapport aux coefficients* A *de la forme* $f(x, y)$.

Remarque. — Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les formes f et φ, sur lesquelles nous avons raisonné, n'étaient pas identiquement nulles ; dans cette hypothèse, $\Delta = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que f et φ admettent un diviseur commun. Nous ferons observer ici que si l'une des formes était identiquement nulle, le résultant serait évidemment nul.

Nous abordons enfin, en terminant ce chapitre, une propriété des formes qui est nécessaire à la démonstration que nous avons en vue. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMEN

12. — *On considère l'équation* f(x) = o, *et l'on propose de calculer* U,

$$U = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \dots + \frac{1}{1+l},$$

a, b, ... l *désignant les racines de l'équation proposée.*

Première solution. — Posons, par un changement de variable naturellement indiqué,

$$1 + x = X;$$

l'équation en X est :

$$f(X - 1) = f(-1) + Xf'(-1) + \dots = o.$$

En prenant alors l'équation aux inverses, on trouve :

$$U = -\frac{f'(-1)}{f(-1)}. \qquad (A)$$

Deuxième Solution. — On sait que l'on a :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{1}{x-a}.$$

En remplaçant dans cette identité x par -1, il vient :

$$\Sigma \frac{1}{1+a} = -\frac{f'(-1)}{-f(1)},$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

* Remarques (**A**). — A cette question se rattachent très simplement plusieurs généralisations et, notamment celle de l'exercice (8), résolu précédemment.

Proposons-nous de calculer la quantité

$$U_1 = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \dots + \frac{l}{1+l},$$

a, b, ... l désignant les racines de l'équation, du degré m,

$$f(x) = o.$$

Nous avons,

$$m - U_1 = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \dots + \frac{1}{1+l},$$

et, par suite,

$$m - U_1 = U,$$

La formule qui donne U_1 est donc, d'après l'égalité (A),

$$U_1 = m + \frac{f'(-1)}{f(-1)}.$$

(**B**). On peut d'ailleurs arriver directement à ce résultat, de la manière suivante.

Soit posé,

$$y = \frac{x}{1+x},$$

d'où

$$x = \frac{y}{1-y}.$$

L'équation transformée est donc,

$$f\left(\frac{y}{1-y}\right) = 0,$$

ou

$$f\left(-1 + \frac{1}{1-y}\right) = 0.$$

On en déduit

$$f(-1) + \frac{1}{1-y} f'(-1) + \ldots = 0,$$

et, par suite,

$$(1-y)^m f(-1) + (1-y)^{m-1} f'(-1) + \ldots = 0.$$

Cette relation peut s'écrire

$$(-1)^m y^m f(-1) + (-1)^{m-1}[mf(-1) + f'(-1)]y^{m-1} + \ldots = 0.$$

La somme des racines de cette équation est donc

$$m + \frac{f'(-1)}{f(-1)},$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

(**C**). Prenons maintenant la transformation homographique la plus générale, laquelle correspond à la formule

$$y = \frac{p+qx}{r+x},$$

et proposons-nous de calculer l'expression

$$U = \Sigma \frac{p+qa}{r+a},$$

le signe Σ s'appliquant aux m racines $a, b, \ldots l$ de l'équation $f(x) = 0$.

Nous trouvons, d'abord, par un calcul tout semblable à celui qui nous a servi à calculer $\Sigma\frac{1}{1+a}$,

$$\Sigma\frac{1}{r+a} = -\frac{f'(-r)}{f(-r)}.$$

Observons maintenant que

$$\frac{p+qa}{r+a} = q + (p-qr)\frac{1}{r+a}.$$

Nous obtenons donc, finalement,

$$\Sigma\frac{p+qa}{r+a} = mq + (qr-p)\frac{f'(-r)}{f(-r)}.$$

(**D**). On peut encore rattacher aux exercices précédents d'autres questions dont la solution découle immédiatement des résultats que nous venons de signaler, en appliquant l'idée si féconde de la décomposition des fractions rationnelles, en fractions simples.

Nous nous bornerons à indiquer ces généralisations.

Observons que

$$\frac{2}{a^2-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1},$$

$$\frac{2i}{a^2+1} = \frac{1}{a-i} - \frac{1}{a+i},$$

$$\frac{2t}{a^2-t^2} = \frac{1}{a-t} - \frac{1}{a+t},$$

$$\frac{2ti}{a^2+t^2} = \frac{1}{a-ti} - \frac{1}{a+ti},$$

$$\frac{pa^2+q}{a^2+K} = p + (q-pK)\frac{1}{a^2+K},$$

et posons :

$$K = t^2, \quad \text{ou} \quad K = -t^2,$$

suivant que K désigne une quantité positive ou négative. Les calculs analogues à ceux que nous avons donnés tout à l'heure, conduisent, sans qu'il soit nécessaire d'expliciter la forme entière $f(x)$, à l'expression

$$\Sigma\frac{pa^2+q}{a^2+K}.$$

Les résultats obtenus, et ceci se produit dans plusieurs

questions d'analyse, peuvent être, en apparence, fonctions de la lettre i; mais cette lettre disparaît, nécessairement, les simplifications étant effectuées.

(**E**). On voit, par ce qui précède, comment on peut poursuivre cette généralisation.

De même que nous avons montré comment on ramenait la connaissance de l'expression

$$\Sigma \frac{pa^2 + q}{a^2 + k},$$

à celle, précédemment acquise, de

$$\Sigma \frac{p'a + q'}{a + k'};$$

de même, en partant de l'idendité

$$\frac{3k^2}{a^3 + k^3} = \frac{1}{a + k} + \frac{j}{a + jk} + \frac{j^2}{a + j^2k},$$

dans laquelle j et j^2 représentent les racines cubiques imaginaires de l'unité, on ramènera le calcul de

$$\Sigma \frac{pa^3 + q}{a^3 + k^3},$$

à celui de la fonction

$$\Sigma \frac{p'a + q'}{a + k'};$$

et, ainsi de suite.

(**F**). Enfin nous ferons encore observer que l'identité

$$\frac{a^2 + pa + q}{a + r} = a + p - r + \frac{r^2 - pr + q}{a + r}$$

permet de calculer la fonction

$$\Sigma \frac{a^2 + pa + q}{a + r};$$

en explicitant seulement les deux premiers coefficients de la forme $f(x)$. On trouve, en appelant A_0, A_1 ces deux coefficients,

$$\Sigma \frac{a^2 + pa + q}{a + r} = -\frac{A_1}{A_0} + m(p - r) + (pr - r^2 - q)\frac{f'(-r)}{f(-r)}.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Causse, boursier d'agrégation à la faculté des sciences de Montpellier, une lettre dans laquelle il nous signale la rectification suivante.

La solution de la question proposée au concours d'agrégation de 1879 (question résolue au t. IV, p. 415, 1880) renferme quelques inexactitudes.

1° L'affirmation qu'on trouve à la p. 420 (l. 4, en remontant), *ce cône est évidemment toujours réel*, n'est pas exacte. La surface peut être un ellipsoïde ;

2° Dans la troisième partie, p. 423, le lieu n'est pas, comme on l'a dit, du quatrième degré. Il est constitué par trois coniques situées dans les plans principaux de l'hyperboloïde proposé.

QUESTION 101

Solution par M. E. Fesquet, élève au Lycée de Nîmes.

Construire point par point, au moyen d'une équerre, la courbe qui correspond à l'équation

$$x^{4n} = \frac{y}{h}\left(y - h\right)^{4n},$$

n *désignant un nombre entier positif.* (G. L.)

L'équation (1) peut s'écrire :

$$y = h\left(\frac{x}{y - h}\right)^{4n}.$$

Nous supposons les axes rectangulaires.

Prenons sur Oy, $OA = h$. Le lecteur est prié de faire la figure. Soit M un point de la courbe. Joignons MA et menons par A une parallèle à Ox. Soit ω l'angle de MA avec cette parallèle. On a

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{x}{y - h}.$$

Par suite :

$$y = h \operatorname{cotg}^{4n} \omega.$$

Ainsi pour avoir un point quelconque de la courbe menons

par A une droite quelconque AB rencontrant Ox en B. On a :

$$OB = h \cot g\, \omega.$$

Menons BC, perpendiculaire à Ox, jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire menée par O, à AB; on a :

$$BC = h \cot g\, \omega \,.\, \cot g\, \omega = h \cot g^2\, \omega.$$

De même :

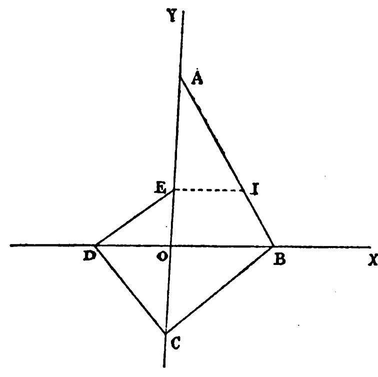
$$CD_1 = h \cot g^3\, \omega,$$
$$D_1E_1 = h \cot g^4\, \omega,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$D_n E_n = h \cot g^{4n}\, \omega.$$

Ainsi, on a :

$$y = D_n E_n.$$

Menons par le point D_n ainsi obtenu une parallèle à OC, c'est-à-dire une perpendiculaire à AB, et, par le point de rencontre de cette droite avec Oy, une parallèle à Ox qui rencontre AB en un point M appartenant à la courbe représentée par l'équation (1). On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra.

Note. On simplifie légèrement la construction indiquée par la remarque suivante, laquelle nous paraît constituer une solution plus simple de la question que nous avons proposée.



Par A, on mène une transversale AB, puis successivement BC perpendiculaire sur AB, CD sur CB, DE sur DC; arrivé au point E, on mène une parallèle EI à OX; le lieu décrit par le point I est la courbe qui correspond à l'équation

$$y(y - h)^4 = hx^4.$$

Si au lieu de s'arrêter au point E, on tourne une fois de plus autour de O, par un circuit analogue au précédent, on aboutit à un point dont le lieu géométrique a pour équation

$$y(y - h)^8 = hx^8;$$

et ainsi de suite.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

140. — On donne la longueur d'un arc de cercle, le rayon de ce cercle étant variable. D'un point on mène des droites aux extrémités de l'arc, faisant entre elles un angle donné. Conditions de maximum du triangle curviligne ainsi formé.

(E. Cr.)

141. — Si l'on pose $A_0 = \sin x$, $A_1 = \sin x - x \cos x$ puis si l'on calcule A_2 A_3... par la formule de récurrence

$$A_{n+1} = (2n - 1)A_n - x^2 A_{n-1},$$

A_n est de la forme $U_n \sin x + V_n \cos x$. Démontrer les propriétés suivantes signalées par M. Hermite.

1° On a

$$A'_n = xA_{n-1},$$
$$xA''_n - 2nA'_n + xA_n = 0,$$

les accents indiquant des dérivées;

2° La fonction A_n s'annule pour $x = 0$ ainsi que ses $2n$ premières dérivées. Quelle valeur prend alors la dérivée d'ordre $2n + 1$?

3° Écrivant $U_n + iV_n = P_n$, puis faisant $x = iy$, P_n est un polynôme ou y à coefficients réels et de degré n;

$$P_n = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_p y^{n-p} + \dots + a_n,$$

on a

$$yP''_n - 2(y + n) P'_n + 2nP_n = 0,$$

puis on en conclut

$$a_p = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1.2.3 \dots (n+p)}{1.2 \dots (n-p), 1.2 \dots p};$$

a_p est entier (*).

142. — En un point M d'une conique on construit le cercle osculateur ; soit N le point où il rencontre une seconde fois la conique. Trouver : 1° le lieu du pôle de la corde MN par rapport au cercle ; 2° l'enveloppe de la tangente en N

(*) M. Poujade, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon, en nous communiquant cette question, nous fait observer que les premières formules ont été données par M. Hermite (*Journal de Crelle* 1876, p. 303 et suivantes). M. Poujade a développé les résultats indiqués par M. Hermite.

au cercle ; 3° l'enveloppe du rayon du cercle qui passe par N.

(J. Neuberg.)

143. — En un point M d'une conique on construit le cercle osculateur C; la seconde tangente commune à ces courbes touchant la conique en N et le cercle en P, on demande : 1° le lieu du point de rencontre des tangentes menées en M et N: 2° le lieu du point P ; 3° l'enveloppe de la corde MN; 4° l'enveloppe de la corde MP; 5° l'enveloppe du rayon CP ; 6° l'enveloppe de la droite CN. *(J. Neuberg.)*

144. — Étant donné un nombre N quelconque du triangle arithmétique, si l'on considère : d'une part, la colonne des nombres situés au-dessus de N, et commençant à N ; d'autre part, la ligne où se trouve N et commençant à l'unité ; la somme algébrique des produits deux à deux des nombres de même rang dans ces deux suites, produits affectés tour à tour du signe + et du signe —, est nulle. Si l'on remplace la colonne par la diagonale commençant à N, le théorème est encore vrai. *(H. Picquet.)*

145. — $C_{m,p}$ désignant le nombre des combinaisons de m objets p à p, et P_m le nombre des permutations de m objets, on a

$$m^m - C_{m,1}(m-1)^m + C_{m,2}(m-2)^m - \ldots$$
$$+ (-1)^h C_{m,h}(m-h)^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} \cdot 1^m = P_m.$$

(H. Picquet.)

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7872-5.

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

DE QUELQUES PROPOSITIONS SUR LA NON-DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FORMES ARITHMÉTIQUES PAR DES NOMBRES DONNÉS

Par M. **S. Réalis.**

En nous adressant les élégantes démonstrations qu'on va lire, M. Réalis, dans sa lettre d'envoi, nous dit : « Le but du petit article ci-joint n'est autre que d'indiquer les principes qui justifient les énoncés proposés dans ma précédente communication : ces principes, bien qu'exclus des programmes d'enseignement, ne sortent aucunement de la partie la plus élémentaire de la science et sont assurément à la portée de tout élève désireux de jeter un regard au delà des programmes. »

Les énoncés dont il est question dans cette lettre sont ceux que nous proposons dans le présent numéro. Nos lecteurs rapprocheront naturellement l'article ci-dessous que M. Réalis a bien voulu écrire, à notre prière, et les exercices que nous venons de viser. G. L.

1. Lemme. — *La forme quadratique* $u^2 + v^2$, *dans laquelle* u *et* v *sont premiers avec* 3, *ne peut représenter aucun nombre divisible par* 3.

Démonstration. — Les nombres u, v étant premiers avec 3, on peut poser $u = 3a + 1$, $v = 3b + 1$, ou bien $u = 3a + 1$, $v = 3b - 1$, ou enfin $u = 3a - 1$, $v = 3b - 1$, les autres cas se réduisant à ceux-ci ; a, b désignent des entiers positifs.

Dans les trois cas, on a un resultat de la forme

$$u^2 + v^2 = 3A + 2,$$

A étant entier et positif; la somme $u^2 + v^2$, c'est-à-dire la forme quadratique considérée, n'est pas divisible par 3.

Observation. — L'un au moins des nombres u, v étant premier avec 3, la forme $u^2 + v^2$ n'est pas divisible par 3. De là la proposition suivante:

Théorème. — *Les nombres* u, v *étant premiers entre eux, la forme* $u^2 + v^2$ *n'est pas divisible par* 3.

C'est un cas particulier de ce théorème bien connu (et qu'il n'y a pas lieu de démontrer ici) que *la somme de deux carrés premiers entre eux ne peut avoir pour diviseur aucun nombre de la forme* $4x + 3$.

2. Lemme. — *Aucun nombre compris dans la forme* $u^2 + 2v^2$, *où l'on suppose* u *et* v *premiers avec* 5, *ne peut être divisible par* 5.

Démonstration. — Les nombres u, v étant premiers avec 5, nous poserons

$$u = 5a + h; \quad v = 5b + k,$$

h et k, indépendants l'un de l'autre, pouvant avoir l'une quelconque des valeurs ± 1, ± 2. La valeur de $u^2 + 2v^2$ se réduira par là à l'une des quatre formes linéaires

$$5A \pm 1; \quad 5A \pm 2,$$

et ne sera, par conséquent, jamais divisible par 5.

Observation. — L'un au moins des nombres u, v étant premier avec 5, le nombre $u^2 + 2v^2$ est nécessairement premier avec 5.

Théorème. — *Les nombres* u, v *étant premiers entre eux, la forme* $u^2 + 2v^2$ *n'est pas divisible par* 5.

C'est une conséquence de ce qui précède et un cas particulier de cette proposition générale que nous ne pouvons qu'énoncer ici :

Aucun nombre compris dans l'une des formes linéaires $8x + 7$, $8x + 5$ *ne peut être diviseur de la forme quadratique* $u^2 + 2v^2$ (en admettant, bien entendu, que u et v sont premiers entre eux).

3. Lemme. — *Aucun nombre compris dans l'une des formes*

$$u^2 + v^2, \quad u^2 + 2v^2,$$

u *et* v *étant premiers avec* 7, *ne peut être divisible par* 7.

La démonstration se fait comme dans les cas précédents. Posons, pour exprimer que u et v sont premiers avec 7,

$$u = 7a + h; \quad v = 7b + k,$$

les restes h et k, indépendants l'un de l'autre, ayant l'une des six valeurs ± 1, ± 2, ± 3. Chacune des formes quadratiques considérées se réduisant par là à l'une des formes linéaires

$$7A \pm 1; \quad 7A \pm 2; \quad 7A \pm 3,$$

il s'ensuit que, dans aucun cas, les premières ne se réduiront à un multiple de 7.

Il suffit évidemment que l'un au moins des nombres u, v soit premier avec 7. Il s'ensuit ce thèorème que

Les nombres u, v *étant premiers entre eux, aucune des formes*

$$u^2 + v^2; \quad u^2 + 2v^2,$$

ne peut admettre le diviseur 7.

4. Théorème. — *Les nombres* u, v *étant premiers entre eux, aucune des formes*

$$u^2 + v^2; \quad u^2 + 3v^2; \quad u^2 + 5v^2$$

ne peut représenter un nombre divisible par 11.

Même mode de démonstration que précédemment, en commençant par le cas où l'on suppose u et v premiers avec 11.

On démontre de même, sans peine, la non-divisibilité des formes

$$u^2 + 7v^2, \quad u^2 + 11v^2, \quad u^2 + 19v^2,$$

par 13. *(A suivre.)*

SUR LA CONVEXITÉ DES COURBES PLANES

Par M. **Édouard Lucas.**

Définition. — On dit qu'un arc de courbe plane est *convexe* ou *concave* en l'un de ses points M vers un autre point P de son plan, lorsque les deux éléments MS et MS′ pris aussi petits qu'on voudra de part et d'autre du point M sont situés par rapport à la tangente en M de l'autre côté du point P ou du même côté.

Théorème. — *Un arc de courbe plane est concave ou convexe en l'un de ses points* M, *vers un point* P *de son plan, selon que le résultat des substitutions des coordonnées du point* P



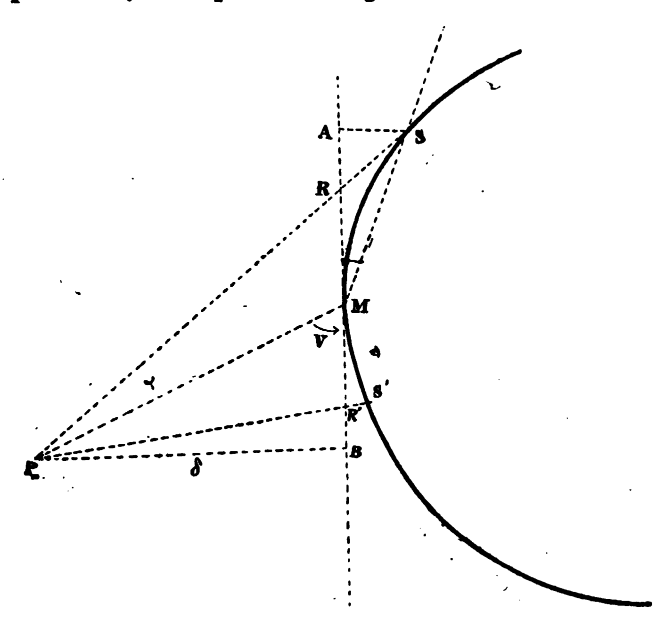
dans le premier membre de l'équation de la tangente en M, *et de celles du point* M *dans le premier membre de l'équation de la Hessienne, ont les mêmes signes ou les signes contraires.*

En d'autres termes, si on désigne par (x, y, z) les coordonnées homogènes du point M; par $f(x, y, z)$ le premier membre de l'équation de la courbe d'ordre n, par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P, et par T_0 et H les expressions :

$$T_0 = x_0 f'x + y_0 f'y + z_0 f'z,$$

$$= \begin{vmatrix} f''xx & f''xy & f''xz \\ f''yx & f''yy & f''yz \\ f''zx & f''zy & f''zz \end{vmatrix}$$

l'arc est concave ou convexe vers le point P, suivant que le produit T_0H est positif ou négatif.



En effet, désignons par λ la longueur MR, par μ le rapport segmentaire $\frac{SR}{P_0S}$, et par N l'expression

$$N = \sqrt{f'x^2 + f'y^2 - 2f'xf'y \cos\theta};$$



les coordonnées du point R de la tangente sont

$$x + \frac{\lambda}{N} f'y, \quad y - \frac{\lambda}{N} f'x, \quad z;$$

et celles du point S

$$x + \frac{\lambda}{N} h, \quad y + \frac{\lambda}{N} k, \quad z + \frac{\lambda}{N} l,$$

en supposant

$$h = f'y + \frac{\mu}{\lambda} Nx_0, \quad k = -f'x + \frac{\mu}{\lambda} Ny_0, \; l = \frac{\mu}{\lambda} Nz_0;$$

portons les coordonnées de S dans l'équation de la courbe et développons par la série de Taylor, nous trouvons

$$0 = \mu T_0 + \frac{\lambda^2}{2N^2} \left\{ h^2 f''xx + \ldots + 2hkf''xy + \ldots \right\} + \ldots$$

Mais nous observons que dans le triangle SRM

$$\frac{SR}{MR} = \frac{\sin SMR}{\sin RSM},$$

ou, d'après les notations de la figure,

$$\frac{SR}{MR} = \frac{\sin SMR}{\sin(V - \alpha)}.$$

Donc lorsque le point S se rapproche indéfiniment du point M, on a : limite $\frac{SR}{MR} = 0$; il en est de même du rapport $\frac{\mu}{\lambda}$. Mais les accroissements h, k, l se composent de deux parties ; l'une fixe, l'autre contenant le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$. On peut donc supposer $\frac{\mu}{\lambda}$ suffisamment petit, de telle sorte que pour cette valeur, et pour toutes les valeurs de plus petit module, la parenthèse ait le signe de

$$f'y^2 f''xx - 2 f'xf'y f''xy + f'x^2 f''yy,$$

ou, par une transformation bien connue, de $\frac{-z^2}{(n-1)^2}$ H ; ainsi pour une valeur suffisamment petite de λ, et pour les valeurs plus petites, μ ne change pas de signe ; on a donc, à la limite,

$$\frac{\lambda^2}{2\mu} = \frac{(n-1)^2 N^2}{z^2} \frac{T_0}{H}.$$

Ainsi μ est positif et il y a concavité lorsque T_0 et H ont les mêmes signes ; il y a convexité dans le cas contraire.

Du cercle de courbure. — Le cercle de courbure est la limite du cercle tangent à la courbe en M et passant par le point S lorsque ce point vient se confondre avec M. En désignant par r son rayon, on a $2r = \lim \frac{\overline{MA}^2}{AS}$. Il est facile de le calculer par ce qui précède. En effet,

$$AS = SR \sin(V - \alpha) = \mu PS \sin(V - \alpha),$$

donc

$$\frac{\overline{AM}^2}{AS} = \frac{\lambda^2}{\mu}\left(\frac{AM}{RM}\right)^2 \frac{1}{PS \sin(V - \alpha)};$$

Mais $\frac{AM}{RM}$ a pour limite l'unité, PS $\sin(V - \alpha)$ a pour limite la distance PB $= \delta$ du point P à la tangente; on a donc

$$r = \frac{N^2(n-1)^2}{z^2}\,\frac{T_0}{H\delta}.$$

En remplaçant δ par sa valeur $\frac{T_0 \sin\theta}{N}$, on a

$$r = \pm \frac{(n-1)^2}{z^2 \sin\theta}\,\frac{N^3}{H}.$$

INDICATIONS SUR UN POINT

DE LA

THÉORIE DES SURFACES HOMOFOCALES

Par M. **G. Kœnigs.**

(*Suite*, voir p. 83.)

4. — Dire qu'une surface de second ordre est une sphère, c'est-à-dire qu'elle est assujettie à la condition de contenir le cercle imaginaire à l'infini Γ ; dire qu'une surface de second ordre est de révolution, c'est-à-dire qu'elle est bi-tangente à ce même cercle.

Maintenant dans les énoncés précédents, rien ne nous empêchede supposer que l'une des surfaces du second ordre s'aplatit de plus en plus jusqu'à se réduire à la région d'un plan extérieur ou intérieur à une conique décrite dans ce

plan. Il est vrai que dans ce cas les cônes précédents c_1, c_2, c_3, c_4 disparaissent; mais, sans insister davantage sur ce fait, il me suffira de dire qu'en envisageant les surfaces A et B comme des enveloppes de plans, on arrive à définir les coniques e_1, e_2, e_3, e_4 à l'aide des coniques doubles de la développable circonscrite à la fois aux surfaces A et B, en sorte que les résultats précédents subsistent, avec cette particularité que l'une des quatre coniques e_1, e_2, e_3, e_4 s'évanouit.

On voit donc que l'on peut supposer que la surface B se réduit au cercle de l'infini, et alors on arrive à cette proposition que : Soit que l'on cherche le lieu des points de contact avec un plan π des sphères tangentes à ce plan et bi-tangentes à une surface A du second degré, soit que l'on cherche le même lieu pour des surfaces de révolution toujours tangentes au plan π, mais circonscrites à A, on trouve toujours trois mêmes coniques.

Cette proposition comprend évidemment celle que nous avions déjà énoncée dès le début à l'égard du cône du second degré.

5. — Dans les lignes qui précèdent je me suis contenté d'esquisser les traits principaux d'une question que je n'ai pas le loisir de creuser, mais qui mérite peut-être d'être approfondie. Les élèves studieux qui y trouveraient quelque intérêt pourront consulter les travaux de M. Chasles sur les surfaces homofocales, ainsi qu'un mémoire de M. Darboux sur les *Théorèmes d'Ivory* (*) : ils y trouveront une série de propositions fort belles sur les surfaces homofocales, et auxquelles celles qu'on a énoncées ici doivent sans doute se rattacher.

Nota. — Je dois aux lecteurs du Journal une rectification pour une inadvertance qui s'est glissée dans un petit mémoire sur les normales aux surfaces du second degré que j'ai publié, il y a quelques années, dans ce recueil (**). En cher-

(*) *Sur les théorèmes d'Ivory*, par M. G. Darboux. Paris, Gauthier-Villars, 1872.

(**) Voyez Journal, année 1881, p. 31.

chant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe du quatrième ordre tracée sur une surface du second ordre contînt les pieds de six normales issues d'un point de l'espace à la surface, j'ai énoncé qu'il était nécessaire et suffisant que cette courbe fût l'intersection de la surface proposée avec une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre formé par le plan de l'infini et les plans principaux de la première. L'erreur tient à ce que j'ai omis de dire qu'un certain système d'équations linéaires, qui figure dans les formules d'identification, est généralement incompatible : il en résulte que la condition énoncée est nécessaire, mais qu'elle n'est pas suffisante. La condition qu'il faut lui adjoindre appartient à un ordre de considérations que j'ai développées dans un mémoire sur les axes des surfaces du second degré publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1883.

PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS

ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 76.)

13. — Mais il est possible de simplifier ces constructions et de donner une nouvelle et plus élégante détermination des foyers.

Considérons en effet la parabole correspondant au sommet A.

Elle est tangente aux deux droites rectangulaires AI, AI′, bissectrices de l'angle A et aux deux droites OB′, OC′, également inclinées sur les précédentes.

La parabole ainsi déterminée admet alors pour directrice la médiane AE du triangle.

Prenons en effet pour axes de coordonnées rectangulaires les bissectrices AI, AI′ de l'angle A.

Une parabole tangente aux deux axes de coordonnées a pour équation

$$\lambda xy + (y - cx - d)^2 = 0$$

avec $\lambda = 4c$; d'où

$$(y + cx)^2 = 2d(y - cx) - d^2.$$

Il reste à exprimer que cette conique est tangente aux deux droites qui ont pour équations

$$y = mx + n, \quad y = -mx + n'.$$

On trouve ainsi

$$dm - cn = mn, \quad dm + cn' = mn',$$

d'où

$$c = m\,\frac{n' - n}{n' + n}, \quad d = \frac{2nn'}{n' + n},$$

et par conséquent, si les deux droites ont pour équations

$$y = x \cot\frac{A}{2} - \frac{b}{2\sin\frac{A}{2}}, \quad y = -x\cot\frac{A}{2} + \frac{c}{2\sin\frac{A}{2}},$$

la parabole sera représentée par l'équation

$$\left(y + \frac{c+b}{c-b}\cot\frac{A}{2}\,x\right)^2 + \frac{2bc}{(c-b)\sin\frac{A}{2}}\left(y - \frac{c+b}{c-b}\cot\frac{A}{2}\,x\right)$$
$$+ \frac{b^2c^2}{(c-b)^2\sin^2\frac{A}{2}} = 0.$$

Mais, lorsque l'équation d'une parabole est sous la forme

$$(Ax + By)^2 = Dx + Ey + F, \qquad (m)$$

l'axe a pour coefficient angulaire $-\frac{A}{B}$. Ainsi la directrice de la parabole en question a pour équation

$$y = \frac{c-b}{c+b}\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\,x$$

et représente par conséquent la médiane AE.

14. — Le paramètre se déduirait de l'équation (*m*) par la formule

$$2p_1 = \frac{AE - BD}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on trouverait ainsi

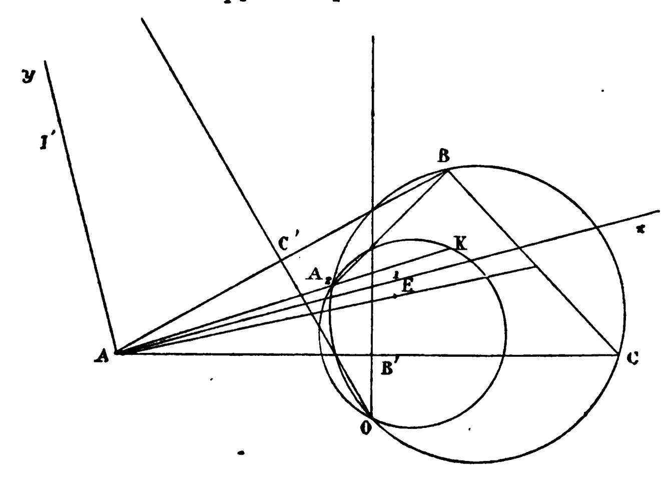
$$2p_1 = \frac{4S(b^2 - c^2)}{a^3};$$

mais voici, pour y parvenir, un autre moyen fondé sur des relations obtenues dans les notices déjà publiées.

Soit en effet A_2 le foyer. En vertu d'une propriété de la parabole, l'angle IAA_2 est égal à l'angle IAE. Mais cette égalité définit la position de la droite AK antiparallèle symétrique de la médiane AE par rapport à la bissectrice AI. Ainsi le foyer A_2 se trouve sur la symédiane AK.

On a ensuite, par définition :

$$p_1 = AA_2 \sin EAK.$$



Le point A_2 se trouve sur la droite AK dont l'équation s'obtient en exprimant que les distances de ses points aux côtés AB et AC sont proportionnelles à ces côtés :

$$\frac{y \cos A - x \sin A}{y} = \frac{c}{b}.$$

On en tire

$$y = -\frac{bx \sin A}{a \cos B} = -\frac{2Sx}{ac \cos B} = x \operatorname{tg} \Phi.$$

D'autre part, dans le triangle ABA_2, on a $\widehat{A_2AC} = \widehat{A_2BA}$, donc

$$AA_2 = AB_1 \frac{\sin ABA_2}{\sin BA_2K}$$

(Congrès d'Alger § 17*)*, ou

$$AA_2 = \frac{c}{\sin A} \sin \Phi.$$

Par conséquent,

$$p_1 = \frac{c}{\sin A} \sin \Phi \sin (2\Phi - A).$$

Développant et remplaçant sin Φ et cos Φ par les expressions en fonction de tg Φ, il vient

$$p_1 = \frac{2Sc}{\sin A} \cdot \frac{[(4S^2 - a^2c^2 \cos^2 B) \sin A - 4Sac \cos A \cos B}{(4S^2 + a^2c^2 \cos^2 B)^{\frac{3}{2}}},$$

$$p_1 = \frac{2S^2c\ (2n^4 - p^4 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2 + a^4 + b^4 - c^4)}{a^3c^3 . bc \sin A},$$

et, toutes réductions faites,

$$p_1 = \frac{2S\ (b^2 - c^2)}{a^3}.$$

On peut donc en conclure, sans autre vérification, pour les paramètres des deux autres paraboles du groupe,

$$p_2 = \frac{2S\ (a^2 - c^2)}{b^3}, \quad p_3 = \frac{2S\ (a^2 - b^2)}{c^3}.$$

15. — Les développements qui précèdent reproduisent les résultats indiqués au § 17 du Mémoire présenté au *Congrès d'Alger*. Le foyer A_2 coïncide, par conséquent, avec le point A_2 d'intersection de la symédiane AK et du cercle de Brocard.

Les éléments de chacune de ces paraboles se trouvent ainsi complètement déterminés, et l'on pourrait se proposer de construire la tangente commune (T) menée sur le point E, sans tracer les coniques.

Nous avons vu que les trois droites OA′, OB′, OB′ sont tangentes chacune à deux des paraboles et que la droite (T) est la tangente commune aux trois paraboles. Le point E d'insersection des trois directrices appartient à cette première tangente commune; mais il est aussi un point du lieu

des angles droits circonscrits à ces coniques. La perpendiculaire à la droite (T) menée par le point E est donc aussi une tangente commune aux trois mêmes paraboles.

Le théorème énoncé précédemment peut donc être complété par les propositions suivantes :

Les directrices des trois paraboles précitées sont les médianes du triangle. Leurs foyers, situés sur le cercle de Brocard, sont les intersections de ce cercle avec les symédianes AK, BK, CK. *Enfin, ces trois coniques admettent une seconde tangente commune* (T') *perpendiculaire à la première tangente* (T) *et menée aussi par le centre de gravité du triangle.*

La position de cette droite est donc, comme celle de la première, susceptible de plusieurs modes de construction.

16. — L'équation de la tangente (T) est assez facile à obtenir en partant des propriétés que nous venons de lui reconnaître. Il suffit de former l'équation de la droite qui passe par les points E et C qui ont pour coordonnées $a' = \frac{c}{a}$, $b = \frac{c}{b}$, $a'' = \frac{\sin(B - \varphi)}{\sin\varphi}$, $b'' = \frac{\sin A - \varphi}{\sin\varphi}$, ou mieux, de substituer les coordonnées du point A' par exemple, dans l'équation générale des droites passant par le centre de gravité E, $a\alpha - b\beta + \lambda(b\beta - c\gamma) = 0$.

L'équation à laquelle on parvient n'offre point de symétrie, parce que la droite qu'elle représente n'est pas déterminée par deux points du triangle ayant leur individualité particulière, comme les points remarquables dont on a étudié les propriétés. Ainsi, tandis que l'équation de la droite (T) n'est pas symétrique, les équations d'autres lignes telles que $\omega\omega'$, OK, HD, etc., sont parfaitement symétriques.

On pourrait, malgré le défaut de simplicité du résultat à obtenir, former directement l'équation de la tangente (T) dans le système de coordonnées rectangulaires défini précédemment. Cela tient à cette circonstance, que l'on connaît une relation entre l'angle α et l'angle φ qui sert à déterminer la position des points A', B', C'.

17. — La construction que j'ai donnée pour l'angle φ dans la *Nouvelle Corr. math. (loc. cit.)*, peut être remplacée

par une construction plus élégante et plus simple, que j'ai rencontrée en traitant le problème de statique suivant :

Trouver, sur une droite fixe inclinée d'un angle α, la position d'équilibre d'un cercle vertical, dont on suppose le centre de gravité au milieu d'un de ses rayons.

Dans la position d'équilibre cherchée, la verticale du point de contact doit passer par le centre de gravité. La position répond donc à l'une des deux intersections de cette verticale avec une circonférence concentrique à la première et de rayon moitié. Pratiquement, cette position d'équilibre serait modifiée par le frottement. L'application étudiée est donc toute théorique. Sauf cette réserve, si l'on désigne par θ l'angle formé par le rayon du centre de gravité et le rayon aboutissant au point de contact, on a

$$\sin \alpha : \frac{R}{2} = \sin(\theta + \alpha) : R;$$

d'où

$$\sin(\theta + \alpha) = 2 \sin \alpha,$$

et, par conséquent, $\varphi = \frac{\theta}{2}$. Ainsi l'angle φ ou 2φ résulte de l'intersection d'une circonférence par une corde rencontrant, sous un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, une autre circonférence concentrique et de rayon double.

Comme on le voit, on ne s'attendait guère à rencontrer ici une application mécanique.

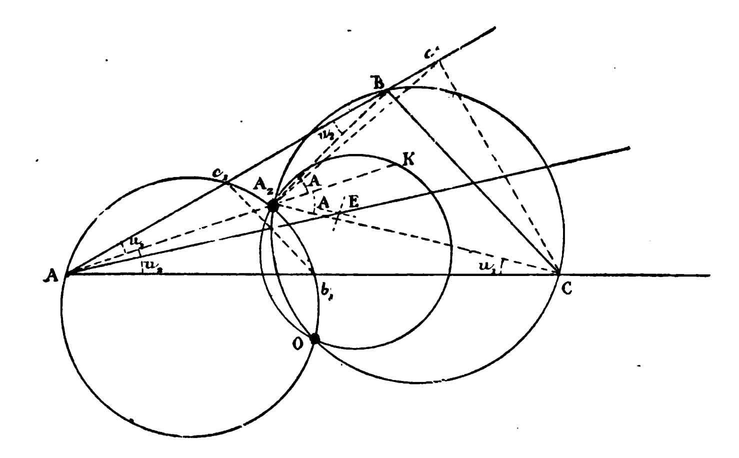
Telles sont les intéressantes propriétés que nous avions à signaler pour les paraboles du premier groupe.

18. — Considérons maintenant les trois paraboles tangentes intérieurement à deux côtés du triangle ABC, aux extrémités du troisième côté. Soit, par exemple, la parabole (BC), qui a pour foyer un certain point A_2.

Cette conique est tangente à la parallèle à la corde de contact BC menée au milieu de la hauteur issue du point A, autrement dit, b_1c_1. Joignons les pieds des médianes BE, CE. La direction conjuguée à la corde BC est la médiane AE.

C'est donc la direction de l'axe de la parabole (BC). La directrice est donc perpendiculaire à la médiane.

Comme la parabole est inscrite au triangle b_1c_1A, son foyer A_2 doit se trouver sur la circonférence circonscrite au même triangle b_1c_1A. Mais le quadrilatère Ob_1Ac_1 est rectangle en b_1 et en c_1; la circonférence circonscrite au triangle passe donc par le point O et a pour diamètre OA. Pour avoir le foyer, il suffit maintenant de tracer la ligne AK, qui rencontre la circonférence au point cherché A_2. En effet AE est la direction de l'axe ; donc, en vertu du théorème énoncé précé-



demment (voir §12 de cette note), l'angle CAA_2 doit être égal à l'angle BAE. Mais cette condition définit une médiane antiparallèle ou symédiane. Donc AA_2 passe bien par le point K.

La position du foyer est donc déterminée; cependant, l'on n'a pas encore établi que ce foyer est aussi un point de la circonférence décrite sur OK comme diamètre.

C'est ce que nous allons maintenant démontrer.

A cet effet, joignons A_2B, A_2C. En vertu d'une propriété de la parabole, les deux triangles A_2AB, A_2AC sont semblables. L'angle BA_2C est donc égal au double de l'angle A, et par conséquent son sommet A_2 se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle COB, qui rencontre la cir-

conférence décrite sur OK comme diamètre (cercle de Brocard) en un point A_2 de la médiane antiparallèle AK (*Congrès d'Alger*, § 17). Le foyer A_2 est donc à l'intersection commune de la circonférence OCB, des circonférences décrites sur OA et sur OK comme diamètres et de la médiane antiparallèle AK.

19. — En coordonnées trilinéaires, et en prenant le triangle donné ABC pour triangle de référence, l'équation de la parabole (BC), par exemple, doit être de la forme $\lambda\alpha^2 + \beta\gamma = 0$; et, en éliminant γ entre cette équation et $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, puis écrivant la condition des racines égales, on trouve $4\lambda bc + a^2 = 0$. Les équations des trois paraboles sont donc :

$$(BC) \ldots\ldots a^2\alpha^2 - 4bc\beta\gamma = 0,$$
$$(AC) \ldots\ldots b^2\beta^2 - 4ac\alpha\gamma = 0,$$
$$(AB) \ldots\ldots c^2\gamma^2 - 4ab\alpha\beta = 0.$$

Pour avoir l'intersection de ces coniques, il suffit de retrancher chaque équation des deux autres. On trouve ainsi

$$(BC) - (AC) = (a\alpha - b\beta)(a\alpha + b\beta + 4c\gamma) = 0.$$

L'équation $a\alpha - b\beta = 0$ représente la médiane CE. Les deux paraboles se rencontrent donc sur la médiane CE, et il est facile de voir que toutes ces coniques, prises deux à deux, divisent les médianes dans un rapport constant, au huitième de leur longueur à partir de leur base. Ces deux propriétés ont été signalées par M. E. Lemoine (*Mathesis*, t. IV, 1884. Question 350, p. 143. L'énoncé 341, donné p. 142 par M. Barbarin, se rapporte à des recherches sur le même sujet d'études.)

L'on reconnaîtra aussi très facilement qu'aux points où les paraboles rencontrent chacune des médianes, les tangentes sont parallèles aux deux autres médianes du triangle, et que les six points d'intersection de ces groupes de tangentes se trouvent sur les côtés du triangle.

Enfin, si l'on transforme ces paraboles par droites symétriques, on en conclut immédiatement cet intéressant théorème :

Une ellipse tangente à deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième côté BC *est également tangente au cercle circonscrit*

si elle passe par l'extrémité P''_a *de la corde symédiane du sommet opposé; et réciproquement.*

Ces ellipses ont pour équations : $a^2\beta\gamma - 4bc\alpha^2 = 0$, $b^2\alpha\gamma - 4ac\beta^2 = 0$, $c^2\alpha\beta - 4ab\gamma^2 = 0$. Ces coniques ont leurs centres sur les médianes et se rencontrent sur les symédianes. Si L, M, N représentent les points de Lemoine des triangles BCP''_a, ACP''_b, ABP''_c, ces points se trouvent sur les symédianes AK, BN, CK; de plus, les triangles ABC, LMN ont le point K pour centre d'homologie et leur axe d'homologie coïncide avec la polaire du point K par rapport au cercle circonscrit ou avec l'axe radical de ce cercle et du cercle de Brocard. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 86.)

Théorème. — *Lorsque dans une forme entière* f(x), *du degré* 2p, *on remplace* x *par* y + z, *si l'on pose*

$$f(y + z) = f_1(z^2) + zf_2(z^2),$$

le résultant des deux formes f_1 *et* f_2 *est du degré* $p(2p - 1)$ *en* y.

Soit $m = 2p$, le degré de l'équation proposée, dans laquelle nous représenterons le premier terme par x^m. Nous avons

$$f_1(z^2) = f(y) + \frac{z^2}{2!}f''(y) + \dots + \frac{z^m f^m(y)}{m!},$$

et

$$f_2(z^2) = f'(y) + \frac{z^2}{3!}f'''(y) + \dots + \frac{z^{m-2}}{(m-1)!}f^{m-1}(y).$$

On observera que les formes $f_1(z^2)$, $f_2(z^2)$ sont, par rapport à la lettre z^2, de degrés respectifs p et $(p - 1)$.

Le résultant R (y) est, d'après la formule établie plus haut, un déterminant d'ordre $2p - 1$:

$$R(y) = \begin{vmatrix} f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \ldots & \frac{f^m(y)}{m!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \ldots & \frac{f^m(y)}{m!} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \ldots & \ldots & \frac{f^m(y)}{m!} \\ f'(y) & \ldots & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & f'(y) & \ldots & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & f'(y) & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant sont des polynômes entiers en y; et le terme du degré le plus élevé de R s'obtiendra en prenant, dans chacun de ses éléments, le terme qui est du plus haut degré, si nous montrons toutefois que le déterminant ainsi formé n'est pas nul.

Posons donc

$$\theta(y) = \begin{vmatrix} y^m & C_m^2 y^{m-2} & \ldots & C_m^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & y^m & C_2^m y^{m-2} & \ldots & C_m^m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & y^m & C_m^2 y^{m-2} & \ldots & C_m^m \\ C_m^1 y^{m-1} & \ldots & C_m^{m-1} y & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & C_m^1 y^{m-1} & \ldots & C_m^{m-1} y & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & C_m^1 y^{m-1} & \ldots & \ldots & C_m^{m-1} y \end{vmatrix}$$

Je dis que $\theta(y)$ ne renferme qu'un terme en y, et que ce terme est du degré $p(2p-1)$.

Multiplions, en effet, comme l'a indiqué M. Cretin, les colonnes, respectivement, par

$$y^0,\ y^2,\ y^4,\ \ldots\ y^{2m-4};$$

les lignes deviennent homogènes et, respectivement, d'un degré égal à :

$$m,\ m + 2,\ m + 4,\ \ldots\ 2m - 4;$$
$$m - 1,\ m + 1,\ \ldots\ 2m - 3.$$

Ainsi, après la multiplication par une certaine puissance de y, on reconnaît que $\theta\ (y)$ est une forme homogène de la lettre y ; d'où nous pouvons conclure qu'elle jouissait aussi de cette propriété avant la multiplication que nous venons d'imaginer.

D'autre part, le terme diagonal de $\theta\ (y)$ est

$$(y^m)^{p-1}\ (C_m^{m-1}\ y)^p,$$

ou

$$m^p\ y^{2p(p-1)+p},$$

ou encore

$$m^p y^{p(2p-1)}.$$

Ainsi $\theta(y)$ est du degré $p(2p - 1)$, et l'on peut poser

$$\theta(y) = Hy^{p(2p-1)},$$

Il reste à vérifier que le coefficient numérique H est différent de zéro. On a en effet

$$H = \theta(1);$$

si l'on avait $H = 0$, les deux formes :

$$\frac{(t + 1)^m + (t - 1)^m}{2},$$
$$\frac{(t + 1_m) + (t - 1)^m}{2t},$$

qui ont précisément pour résultant $\theta(1)$, admettraient un diviseur commun δ. Ce diviseur serait donc aussi commun aux formes :

$$(t + 1)^m,\quad (t - 1)^m,$$

et ceci est impossible, car $t + 1$, et $t - 1$ étant premiers entre eux, nous savons que $(t + 1)^m$, et $(t - 1)^m$ sont aussi premiers entre eux (*).

(*) Pour la suite de cette démonstration voyez notre traité d'Algèbre.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. S. Réalis, ingénieur à Turin.

... Après les substantiels travaux sur l'analyse indéterminée qui figurent dans les derniers volumes du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, je crois que quelques propositions très simples sur la non-divisibilité de certaines formes quadratiques binaires par certains nombres premiers, peuvent maintenant être invoquées sans inconvénient comme moyen de solution pour une classe de questions se rattachant à la fois à l'arithmologie et à la théorie des équations. Les propositions particulières sur lesquelles reposent les énoncés ci-joints ne sont pas rapportées, à la vérité, dans les articles cités; mais elles sont si aisées à démontrer directement, sans avoir recours à la théorie générale exposée par Lagrange dans ses *Recherches d'Arithmétique* (t. III des *Œuvres*), qu'elles ne sauraient réellement pas faire objet de difficulté, même dans les éléments. C'est sur quoi je pourrai revenir au besoin, dans un article spécial.

D'après cela, je crois pouvoir vous adresser les quelques *questions* ci-jointes (*), pour être insérées, s'il y a lieu, dans votre utile recueil. Si l'on parvient à résoudre ces questions par une voie différente de celle qui les a amenées (ce dont il y a lieu de douter), ce sera autant d'acquis au point de vue de la méthode. Dans le cas contraire, et en admettant chez vos jeunes lecteurs la connaissance des lemmes préliminaires, la recherche des différentes solutions ne laissera pas que de leur offrir un utile sujet d'exercice.

Des résultats de ce genre peuvent assurément être multipliés, et variés de beaucoup de manières (**)...

(*) Voyez les questions proposées à la fin du présent numéro.

(**) On peut ajouter à l'énoncé 159, par exemple, que, pour β premier avec 3, aucune des équations

$$x^4 + \alpha x^3 + 2\alpha^2x^2 - \alpha\beta^2x - 2\beta^4 = 0$$
$$x^4 + \alpha x^3 + 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2x - 2\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière.

Additions analogues pour les autres énoncés.

QUESTIONS D'EXAMENS

* **13.** — *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à la cubique* Γ *qui correspond à l'équation*

$$y^2 = x^3,$$

deux tangentes rectangulaires.

En exprimant que la droite ($y = mx + n$) rencontre Γ en trois points dont deux sont coïncidents, on trouve que l'équation générale des tangentes à Γ est

$$y = mx - \frac{4m^3}{27}.$$

En considérant x, y comme les coordonnées d'un point du lieu, on voit que l'équation

$$m^3 - \frac{27x}{4} m + \frac{27y}{4} = 0$$

admet trois racines parmi lesquelles deux (m' m'') ont un produit égal à -1; soit m la troisième racine, on a

$$mm'm'' = -\frac{27y}{4},$$

ou

$$m = \frac{27y}{4}.$$

Finalement, l'équation du lieu est

$$y^2 = \frac{4}{27}\left(x - \frac{4}{27}\right).$$

Le lieu est donc une parabole; on vérifiera que cette parabole est doublement tangente à la cubique proposée.

* **14.** — *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe qui correspond à l'équation*

$$xy^2 = 1,$$

deux tangentes rectangulaires.

La méthode ordinaire, rappelée dans l'exercice précédent, conduit à un résultat remarquable; on trouve que le lieu demandé est un cercle.

* **15.** — *Mener une tangente commune à deux coniques confocales.*

Lorsque deux coniques sont confocales, elles admettent d'abord deux tangentes communes imaginaires. Ce sont les parallèles aux directions isotropes, issues du foyer commun. Pour ce motif, le problème proposé est quadratique; et si l'on désigne par F le foyer commun, par A et B les points d'intersection des cercles principaux des deux coniques, les deux autres tangentes communes sont les perpendiculaires élevées aux points A et B, aux rayons vecteurs FA et FB.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de Géométrie descriptive, par F. I. C. (deuxième édition; Mame et fils, Poussielgue frères, éditeurs, 1884). — Il y a presque un demi-siècle, en 1837, Chasles (*) écrivant son *Aperçu historique*, après avoir rappelé les ouvrages de Lacroix et de Hachette, les traités de Leroy, de Vallée, et de Lefébure de Fourcy, disait, en parlant des mémoires de Th. Olivier qui paraissaient alors dans le *Journal de l'École Polytechnique :* « La Géométrie descriptive est encore en voie de progrès ». Cette parole de Chasles est revenue plus d'une fois à notre mémoire en lisant les nombreux traités de Géométrie descriptive qui ont été publiés dans ces dernières années et qui marquent, d'une façon si nette, la marche en avant de la science de Monge. Les Exercices de Géométrie descriptive publiés par l'homme modeste et savant qui ne se révèle à nous que par les initiales citées plus haut, nous paraissent bien dignes de prendre place à côté des livres auxquels nous venons de faire allusion; et, comme eux, il contribuera pour sa large part au progrès incessant que nous avons rappelé.

Ce livre que nous voudrions analyser en détail s'adresse tout particulièrement aux candidats à l'Ecole de Saint-Cyr, à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Centrale. Il nous a bien agréablement surpris par la clarté de son exposition, l'abondance et la variété des questions qu'il développe. « Les idées générales, dit l'auteur, avec tant de raison, dès les premières pages de son livre, ont toujours une grande importance; or ces idées se développent surtout par l'étude des méthodes applicables à un grand nombre de questions, et non par la connaissance d'une multitude de problèmes résolus directement ou traités par des procédés d'un usage trop restreint. » Il y a dans ces quelques mots l'expression d'une idée qui nous paraît profondément sage et juste, conforme en tous ses points à celle qu'un professeur ne doit jamais perdre de vue. Elle s'applique remarquablement bien à toutes les branches de l'enseignement, mais, peut-être, plus particulièrement à la Géométrie Descriptive, science dans laquelle il est si facile, par l'abus des petits problèmes et par l'examen excessif et trop multiplié des cas particuliers, de perdre de vue les principes généraux et les idées fondamentales.

(*) Chasles, *Aperçu historique*, p. 356.

Dans la citation que nous avons faite tout à l'heure, on peut trouver le résumé très exact du plan que l'auteur s'est imposé et qu'il n'a pas un seul instant perdu de vue dans la rédaction de son ouvrage. Nous regrettons vivement de ne pouvoir entrer, faute d'espace, dans l'examen détaillé de ce livre. Nous citerons pourtant, parmi les chapitres qui nous ont plus particulièrement frappé, les problèmes relatifs au paraboloïde et à la sphère; ceux, très originaux, qui traitent de l'enroulement des courbes sur les surfaces; les plans cotés, qui donnent lieu à des questions nombreuses, fréquemment posées, sous des formes diverses, aux examens de Saint-Cyr et de l'Ecole Centrale ; enfin, les problèmes de récapitulation tirés, pour la plupart, des compositions données dans les différents concours.

L'impression du livre, et ce n'est pas une quantité négligeable dans un ouvrage où la figure joue un rôle presque prépondérant, est remarquablement soignée. Les épures accompagnent le texte; leur exécution et leur clarté ne laissent rien à désirer. C'est, en résumé, un ouvrage bien conçu, bien rédigé et très heureusement exécuté. Il est d'ailleurs écrit avec une grande netteté et l'on y rencontre des traces constantes d'originalité et d'érudition.

Peut-être n'est-il pas assez répandu dans l'enseignement universitaire; ses qualités qui nous ont vivement frappé nous font désirer que le jugement élogieux que nous venons de porter sur lui et qu'il nous paraît mériter si bien, contribue à le faire connaître et apprécier. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

159. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 3, aucune des deux équations

$$x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + \alpha x^3 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. *(S. Réalis.)*

160. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 5, aucune des équations

$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^3 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0;$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 \pm 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x_3 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 + 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. *(S. Réalis.)*

(*) Les questions 138 à 145 proposées dans les numéros de mars et avril derniers ont été mal désignées. Elles doivent, en réalité, porter les numéros 151 à 158.

161. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 7, aucune des équations

$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm \beta^2)x^2 + 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 5\beta^2)x^2 \pm 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0;$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm 2\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 \pm \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0;$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 - 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm 4\beta^2)x^2 + 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 6\beta^2)x^2 \mp 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. (*S. Realis.*)

162. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 13, aucune des équations

$$x^4 + 4\alpha x^3 + 17\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 17\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 9\alpha x^3 + 17\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 9\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 17\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. (*S. Realis.*)

163. — Étant données trois droites dans l'espace, il n'est pas, en général, possible de construire un triangle ayant ses sommets respectivement sur les droites données, et tel que chacun de ses côtés soit orthogonal à la droite passant par le sommet opposé. Faire voir que dans le cas où le problème est possible, il est indéterminé et trouver alors le lieu du centre de gravité du triangle et l'enveloppe de son plan. *E. Cr.*)

164. — ABRACADABRA (*)

On écrit un mot en triangle, comme il suit, en prenant pour exemple le mot *abracadabra* :

(*) La théorie du triangle arithmétique provient peut-être de l'étude des propriétés de ce triangle cabalistique.

ABRACADABRA
ABRACADABR
ABRACADAB
ABRACADA
ABRACAD
ABRACA
ABRAC
ABRA
ABR
AB
A

Dans ce triangle les mêmes lettres sont placées sur une même diagonale, et l'on voit qu'en partant d'une ligne quelconque on peut lire le mot dans le sens de gauche à droite et de bas en haut.

Démontrer que si l'on part de la première lettre à gauche dans la ligne de rang $(q + 1)$ du triangle formé par un mot de $(p + 1)$ lettres, le nombre des manières de lire le mot est C_p^q, et que le nombre total, pour toutes les lignes, est 2^p. *(Édouard Lucas.)*

ERRATUM. — Dans le précédent numéro, p. 79, ligne 6; au lieu de *les bissectrices intérieures*, lisez *les perpendiculaires aux milieux des côtés.*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 10716-3.

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

DE QUELQUES PROPOSITIONS SUR LA NON-DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FORMES ARITHMÉTIQUES PAR DES NOMBRES DONNÉS

Par M. **S. Réalis.**

(*Suite*, voir p. 97.)

5. — On voit assez de quelle manière on parvient à mettre en évidence la non-divisibilité de certaines formes quadratiques par des nombres donnés, lorsque les diviseurs sont peu considérables. Tout se réduit effectivement, d'après le procédé indiqué, à constater la chose pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots, 2p$ des indéterminées qui entrent dans la forme proposée, $2p + 1$ étant le diviseur considéré.

Aux exemples qui précèdent, et où il n'est question que de formes du deuxième degré, nous ajouterons encore les suivants, se rapportant à des formes d'un degré plus élevé. Nous sous-entendons que les nombres u, v sont positifs et premiers entre eux.

Théorèmes. — 1° *Aucune des formes*

$$u^3 \pm 3v^3; \quad 3u^3 - v^3$$

ne peut représenter un nombre divisible par 7.

2° *Aucune des formes*

$$u^5 \pm 5v^5; \quad 5u^5 - v^5$$

ne peut représenter un nombre divisible par 11.

Ces propositions n'ont peut-être pas encore été énoncées d'une manière explicite; on les vérifie immédiatement en procédant comme ci-dessus, c'est-à-dire en exprimant u et v par des formes linéaires où ils soient premiers avec le diviseur considéré.

6. Note. — Les fondements de la théorie concernant les diviseurs des formes quadratiques à deux indéterminées ont été posés par Euler dans différents mémoires qui font partie

des *Novi Commentarii Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, Mémoires où se trouvent démontrées plusieurs propositions dont Fermat n'avait laissé que les énoncés. L'exposition méthodique de la théorie générale a fait ensuite l'objet d'un mémoire très substantiel de Lagrange, intitulé *Recherches d'arithmétique* (t. III des *Œuvres*). La même théorie a été reprise depuis, avec de nouveaux développements, par Euler, dans le mémoire *Novæ demonstrationes circa divisores numerorum formæ $x^2 + ny^2$* (Voir *Nova Acta Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, t. I) (*). Dans ces importants écrits, les deux grands géomètres parviennent, par des voies différentes, à la détermination des formes quadratiques, et des formes linéaires correspondantes, dans lesquelles doivent être renfermés les diviseurs dont il s'agit, et d'où l'on conclut ensuite les formes linéaires qui se rapportent aux non-diviseurs.

Nous n'avons pas besoin de rappeler, en terminant d'après l'ordre chronologique, les célèbres *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, où la théorie des formes quadratiques fait l'objet de la section IV *(De congruentiis secundi gradus)*.

Les principaux résultats renfermés dans les ouvrages cités ont été consignés par Legendre dans la *Théorie des nombres* (t. I, seconde partie). A défaut des sources originales, on consultera aussi avec fruit les *Exercices d'analyse numérique*, par Le Besgue; on y trouve (§ XIII, n°s 63 et 64) la démonstration, d'après Gauss, des théorèmes généraux auxquels se rapportent les n°s 1 et 2 ci-dessus.

Dans aucun de ces écrits, disons-le tout de suite, l'exposition n'est de nature à être introduite dans l'enseignement courant.

7. — Les démonstrations tout à fait élémentaires dont nous avons ci-dessus indiqué le principe, ont pour but de mettre à la portée des élèves, indépendamment des doctrines arithmologiques, un grand nombre de propositions dont la

(*) Ce mémoire d'Euler se trouve reproduit dans l'édition : *Leonhardi Euleri commentationes arithmeticæ collectæ*, publiée à Saint-Pétersbourg, 1849; Voy. t. II, p. 159. G. L.

connaissance peut être utile en différentes questions d'analyse. Le procédé employé n'est pas particulier aux théorèmes considérés, et peut mettre sur la voie de résultats entièrement nouveaux; il fournit en outre le moyen de s'assurer de l'exactitude ou de la fausseté de certaines conclusions auxquelles on pourrait être conduit par l'induction, ou autrement; il est enfin d'une extrême simplicité. C'est ce qui peut donner quelque intérêt à cet essai de contribution, de notre part, à l'œuvre si bien initiée par le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, et qui a pour objet la vulgarisation des principes de l'analyse indéterminée et de la théorie des nombres.

PROPRIÉTÉS
DE
L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS
ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 104.)

20. — Si les paraboles sont rapportées à AC pris pour axe des x et à la perperdiculaire Ay, l'équation de la parabole (BC) est de la forme

$$\lambda y(y - mx) + \left[y + m'(x - b)\right]^2 = 0$$

en posant pour abréger, tg A $= m$, et tg C $= m'$. On aura pour déterminer λ la condition

$$(2m' - m\lambda)^2 - 4m'^2(1 + \lambda) = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{4m'(m + m')}{m^2},$$

et l'équation de la parabole (BC) deviendra

$$\left(m'x - \frac{m + 2m'}{m}y\right)^2 - 2bm'(y + m'x) + b^2m'^2 = 0.$$

De même, la parabole (AC) aura pour équation

$$[(m' - m)y - 2mm'x]^2 + 4bmm'^2(y - mx) = 0,$$

et la parabole (AB),

$$[m'x + y(m' + 2m)]^2 - 8b(m + m')y = 0.$$

Le paramètre de la première parabole aura alors pour expression

$$2p = \frac{2bm'^2\left[1 + \frac{m + 2m'}{m}\right]}{\left[m'^2 + \left(\frac{m + 2m'}{m}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

et en profitant des relations

$$m' = \frac{mc \cos A}{a \cos C}, \quad \frac{m + 2m'}{m} = \frac{b + c \cos A}{a \cos C},$$

l'on trouve, en définitive,

$$2p = \frac{4a^2b^2 \sin^2 C}{\left[a^2 \sin^2 C + b^2 + c^2 \cos^2 A + 2bc \cos A\right]^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$p_a = \frac{8S^2}{a^3}.$$

Les deux autres paraboles auront donc pour paramètres :

$$p_b = \frac{8S^2}{b^3}, \quad p_c = \frac{8S^2}{c^3}.$$

21. — Chacune des paraboles considérées dans ce qui précède admet cinq tangentes particulières, savoir : pour la parabole (BC), les côtés AB, AC, du triangle, la droite qui joint leurs milieux, et les parallèles à une des médianes BE, CE, menées par les points qui divisent l'autre médiane au huitième de sa longueur à partir de la base. L'existence d'une sixième tangente a été signalée par M. E. Lemoine, dans deux mémoires que l'auteur m'a obligeamment communiqués (*).

Désignons par μ, μ', ν, ν', les points de rencontre des côtés

(*) Ces deux Mémoires ont paru dans les numéros de mai 1885 de *Mathesis* et des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

du triangle avec les droites BO, BO', CO, CO'. L'une des droites $\mu\nu'$, $\nu\mu'$, est tangente à la parabole (BC).

En effet, les coordonnées des points O et O' étant respectivement proportionnelles à $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ et à $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$, l'équation de BO$\mu$ est $\alpha + m\gamma = 0$, avec $\frac{b}{c} + m\frac{a}{b} = 0$ ou $b^2\gamma - ac\alpha = 0$. On trouverait de même $c^2\beta - ab\alpha = 0$ pour équation de CO'ν'. On en conclut aisément, pour équation de $\mu\nu'$, $c^2\beta + b^2\gamma - abc\alpha = 0$ et cette droite est bien tangente à la parabole (BC); mais il n'en est plus de même de la droite $\nu\mu'$, car cette droite a pour équation $ac^2\gamma + ab^2\beta - b^2c^2\alpha = 0$, et l'on voit qu'elle n'est pas tangente à la parabole proposée.

L'analogie semblait autoriser cette déduction; mais, comme l'a fait remarquer M. E. Lemoine, les deux droites $\mu\nu'$, $\nu\mu'$, ne sont pas comparables. Si l'on se reporte, en effet, à la corrélation nouvelle indiquée par M. E. Lemoine entre les points K, O et O', l'une des droites considérées joint les extrémités des deux parallèles à deux côtés différents, tandis que l'autre joint les extrémités de deux parallèles à un même côté. La première seule est tangente à la parabole.

A chaque point M du plan du triangle correspondent deux points m, m', obtenus comme il suit.

Les lignes AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle en trois points α_1, β_1, γ_1, par lesquels on mène des parallèles aux deux autres côtés, ce qui détermine six points λ, λ', μ, μ', ν, ν', disposés dans l'ordre direct ou inverse des sommets du triangle ABC. Les droites Aλ, Bμ, Cν se rencontrent en un point m, les droites Aλ', Bμ', Cν' en un point m'. Lorsque le point M est le point de Lemoine, les points m, m' deviennent les points de Brocard.

22. — Ainsi, en résumé, nous avons établi la proposition suivante :

Théorème. — *Dans tout triangle, les deux bissectrices de chaque angle et les perpendiculaires aux milieux des côtés qui comprennent cet angle forment un groupe de quatre droites tan-*

gentes à une parabole dont la directrice est la médiane partant du sommet de l'angle considéré.

Les trois paraboles ainsi déterminées admettent deux tangentes communes rectangulaires passant par le centre de gravité du triangle, point commun à leurs directrices (*).

L'une de ces tangentes rencontre les perpendiculaires aux milieux des côtés en trois points, sommets de triangles isoscèles semblables, intérieurs au triangle donné, et dont l'angle φ *à la base est déterminé par l'équation*

$$\cot^2 \varphi - 2 (\cot A + \cot B + \cot C) \cot \varphi + 3 = 0.$$

Les foyers A_2, B_2, C_2 *de ces trois paraboles sont les intersections des médianes antiparallèles du triangle avec le cercle de Brocard.*

Ces points sont aussi les foyers des trois paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième côté.

Ces paraboles admettent pour axes des parallèles aux médianes du triangle et pour cordes communes ces médianes, qu'elles divisent dans un rapport constant, au huitième à partir de leurs bases.

Il est, enfin, à rappeler que ces points A_2, B_2, C_2 ont été déjà considérés dans une des précédentes études, et tout ce que nous venons de dire peut être regardé comme le développement de certains paragraphes du Mémoire précité (*Congrès d'Alger*, §§ 15, 16, 17, 18). La notion de ces points a été donnée dans ce Mémoire d'après les résultats obtenus à cette époque par M. G. Tarry, puis rappelés au *Zeitschrift* (questions 314, 315, t. XIV, 1883, p. 357) et leurs principales

(*) Voici un autre groupe de trois paraboles remarquables présentant plusieurs analogies avec les paraboles précitées.

Les deux bissectrices de chaque angle d'un triangle et les deux hauteurs correspondant aux côtés de cet angle forment un système de quatre tangentes à une parabole.

Les trois paraboles ainsi déterminées admettent pour directrices les symédianes et pour foyers les intersections des médianes avec la circonférence décrite sur la distance du centre de gravité à l'orthocentre comme diamètre.

De plus, ces trois paraboles sont tangentes à deux droites rectangulaires passant par le centre des symédianes, point de rencontre des directrices.

Cette proposition offre un intéressant exemple d'un genre peut-être nouveau de réciprocité dans les propriétés de certains points du triangle, transformés les uns des autres par droites symétriques.

propriétés ont été démontrées dans le Mémoire d'Alger (*loc. cit.*) et dans le *Zeitschrift* (t. XV. 1884, p. 121-122).

Ainsi, les points A_2, B_2, C_2 se trouvent aux intersections du cercle de Brocard avec les circonférences OAB, OAC, OBC, ou plus simplement avec les droites AK, BK, CK, symédianes du triangle. Les triangles ABC, $A_2B_2C_2$ sont homologiques. Leur centre d'homologie est donc le point K, centre des symédianes ou point de Lemoine. Leur axe d'homologie est une certaine droite dont on n'a pas encore étudié les propriétés.

23. — Pour terminer, nous allons brièvement indiquer la traduction analytique des divers résultats exposés plus haut pour les points A_2, B_2, C_2.

L'équation du cercle $A_2B_2C_2$ (cercle de Brocard) a été donnée pour la première fois, dans le *Quart. J. of pure and appl. math.* (t. XIX, 1883, n° 76), par M. R. Tücker, en coordonnées trilinéaires, sous la forme très simple et très symétrique

$$abc\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\alpha\beta.$$

Il est facile de reconnaître l'identité de cette équation avec celle que M. Stoll a indiquée dans le *Zeitschrift* (t. XV, 1884, p. 121 et 354) :

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}\left(\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C}\right)$$
$$(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = \alpha\beta \sin C + \alpha\gamma \sin B + \beta\gamma \sin A,$$

au moyen de laquelle on reconnaît facilement que l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit est la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit, propriété énoncée par M. Casey et par M. Fuhrmann (*Zeits.*, *loc. cit.* t. XV, pp. 125 et 435-436).

Cette droite (d) qui a pour équation

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$$

(Stoll, *loc. cit.* t. XV, p. 354), est donc la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit (Fuhrmann, *loc. cit.*) ; mais, d'après une intéressante remarque de M. G. de Longchamps, elle est susceptible d'une élégante construction que l'on peut ainsi définir :

Les tangentes menées par les sommets d'un triangle ou cercle circonscrit rencontrent, comme l'on sait, les côtés correspondants en trois points situés en ligne droite (*). Cette droite (*d*) est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle de Brocard.

En voici d'ailleurs une démonstration.

Le cercle circonscrit a pour équation

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

Les tangentes aux sommets A, B, C ont respectivement pour équations

$$\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0,\quad \frac{\gamma}{c}+\frac{\alpha}{a}=0,\quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=0.$$

Elles rencontrent donc les côtés correspondants en trois points situés sur une même droite (*d*) ayant pour équation

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0.$$

De même, ces trois tangentes forment un triangle circonscrit A″B″C″ et les droites AA″, BB″, CC″ ont respectivement pour équations

$$\frac{\gamma}{c}=\frac{\beta}{b},\quad \frac{\alpha}{a}=\frac{\gamma}{c},\quad \frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}.$$

Elles concourent donc en un même point K, centre d'homologie des deux triangles ABC, A″B″C″,

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c},$$

c'est-à-dire dont les distances sont proportionnelles aux côtés, ce qui définit le centre K des symédianes ou point de Lemoine. Ce point est le pôle de la droite (*d*) par rapport au cercle circonscrit, et l'on retrouve ainsi une construction connue de ce point K. (Voir l'étude de M. J. Neuberg dans *Mathesis*, t. I, p. 173.)

24. Quant aux points A_2, B_2, C_2, leurs coordonnées peuvent s'obtenir facilement par ce qui précède. Le point A_2, par

(*). Cette propriété est un cas particulier de celle qui s'observe sur les coniques circonscrites à un triangle.

exemple, résulte de l'intersection des lignes représentées par les équations

$$abc\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\,\alpha\beta, \qquad (1)$$

$$\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Divisant la première par γ^2 et remplaçant $\frac{\beta}{\gamma}$ par $\frac{b}{c}$, il vient

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{a}{c}\right)\left(\frac{\alpha}{\gamma} - b\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}\right) = 0,$$

équation qui représente le faisceau des deux droites BB_2 et BA_2.

Ainsi les coordonnées du point A_2 ont pour expressions

$$\frac{\alpha}{\frac{2\,c \cos A}{a}} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Ces résultats peuvent être obtenus directement. En effet, d'après les propriétés indiquées au Mémoire du *Congrès d'Alger* (*loc. cit.* § 17), si l'on désigne, pour abréger, AA_2, BB_2, CC_2, par ξ, η, ζ et les angles $ACA_2 = BAA_2$ et $CAA_2 = ABA_2$ par u_1 et u_2, la similitude des triangles A_2AC, A_2AB donne

$$\xi^2 = \eta\zeta.$$

De plus, $CA_2K = BA_2K = u_1 + u_2 = A$. Le point A_2 se trouvant sur la symédiane AK, l'on a

$$\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Mais la relation

$$\frac{\xi}{\sin u_1} = \frac{b}{\sin A}$$

peut s'écrire, successivement,

$$\sin A \cos A = \frac{b \sin u_1 \cos A}{\xi}, \quad \frac{\eta\zeta \sin 2A}{2} = b\xi \sin u_1 \cos A,$$

$$\text{aire } CA_2B = 2 \,.\, \text{aire } AA_2C'',$$

C'' étant la projection du point C sur AB. On a donc

$$a\alpha = 2b\gamma \cos A.$$

Pour avoir les expressions définitives des coordonnées α, β, γ du point A_2, il n'y a qu'à ajouter la condition

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S,$$

et l'on trouve

$$\alpha = \frac{2S\,(m^2 - 2a^2)}{a(2m^2 - 3a^2)},\quad \beta = \frac{2Sb}{2m^2 - 3a^2},$$

$$\gamma = \frac{2Sc}{2m^2 - 3a^2}. \qquad (A_2)$$

Les coordonnées des points B_2 et C_2 s'en déduisent par symétrie, et ont alors pour expressions :

$$\alpha = \frac{2Sa}{2m^2 - 3b^2},\quad \beta = \frac{2S\,(m^2 - 2b^2)}{b(2m^2 - 3b^2)},$$

$$\gamma = \frac{2Sc}{2m^2 - 3b^2}; \qquad (B_2)$$

$$\alpha = \frac{2Sa}{2m^2 - 3c^2},\quad \beta = \frac{2Sb}{2m^2 - 3c^2},$$

$$\gamma = \frac{2S\,(m^2 - 2c^2)}{c(2m^2 - 3c^2)}. \qquad (C_2)$$

Il est évident que l'équation (1) est identiquement vérifiée par les coordonnées de tous les points remarquables ω, ω', O. K, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Il n'y a qu'à y substituer les expressions trouvées, préalablement débarrassées des facteurs constants qu'elles pourraient renfermer. Ainsi, pour le point A_2. par exemple, il suffirait de remplacer α, β, γ, respectivement par $\frac{m^2 - 2a^2}{a}$, b, c.

25. — Le calcul barycentrique de Möbius s'appliquerait également avec succès aux mêmes recherches, et donnerait plus de simplicité encore à certains résultats, ainsi que j'ai pu en juger par de nombreuses communications que je dois à l'obligeance d'un des géomètres qui ont le plus brillamment développé l'étude de ces intéressantes questions, M. J. Neuberg.

Enfin, il n'est pas jusqu'à des ellipses remarquables dont il y aurait encore à étudier les propriétés. Ces ellipses, indiquées aussi par M. A. Artzt, passent par le centre de gravité du triangle et touchent deux autres côtés aux extrémités du troisième. Leur détermination graphique se ramène à celle des ellipses circonscrites au triangle et dont le centre coïncide avec le centre de gravité. ellipses que l'on

rencontre dans d'autres recherches (*) et sur lesquelles s'est fixée déjà la curiosité de Steiner (**). Mais nous ne voulons pas abuser de la patience du lecteur, et nous croyons devoir en rester là, pour le moment, quitte à y revenir quelque jour, et saisir alors cette occasion de donner une bibliographie assez détaillée des travaux relatifs à l'étude des curieuses propriétés remarquées dans la géométrie du triangle.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps** (***).

1. — On sait que si l'on imagine une courbe (ou une surface) Γ et que, sur les normales à celle-ci, à partir du pied de la normale, on porte constamment, du même côté, une longueur donnée h; le lieu décrit par l'extrémité du segment ainsi obtenu est une courbe (ou une surface) Γ' dite *parallèle* à Γ.

La raison de cette dénomination ressort du théorème suivant:

Aux points correspondants les courbes parallèles ont leurs tangentes parallèles.

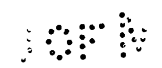
Voici, de cette propriété, une démonstration basée sur l'idée des transversales réciproques et qui paraîtra peut-être assez simple.

(*) On peut citer, par exemple, les ellipses et triangles provenant de la projection cylindrique d'un cercle et d'un triangle équilatéral inscrit ou circonscrit. Voir aussi Steiner, *Gesammelte Werke*, t. II, p. 431 et *J. de Crelle*, t. 45, p. 177-180.

(**) En projetant la figure formée par un triangle équilatéral, le cercle circonscrit et les cercles tangents à deux côtés aux extrémités du troisième, on conclut immédiatement cette propriété :

Les quatre ellipses dont il vient d'être question sont égales et ont leurs axes parallèles.

(***) Les courbes et les surfaces parallèles ont été remarquées et étudiées depuis longtemps. L'un des premiers mémoires sur cette question, le premier du moins à notre connaissance, a été écrit par Crelle (*Annales de Gergonne*, t. XII, 1821-1822; p. 1). Ce mémoire est intitulé : *Sur le parallélisme des lignes et surfaces courbes*, par M. Crelle, docteur en philosophie. Crelle, dans ce mémoire, démontre entre autres choses, mais par l'analyse, la propriété fondamentale des courbes parallèles, savoir que *le parallélisme est généralement réciproque pour toutes les courbes*, propriété que nous établissons ici par des considérations géométriques.



Prenons sur Γ deux points voisins M, N; soient M' et N' les points correspondants sur les normales OM, ON. Nous avons

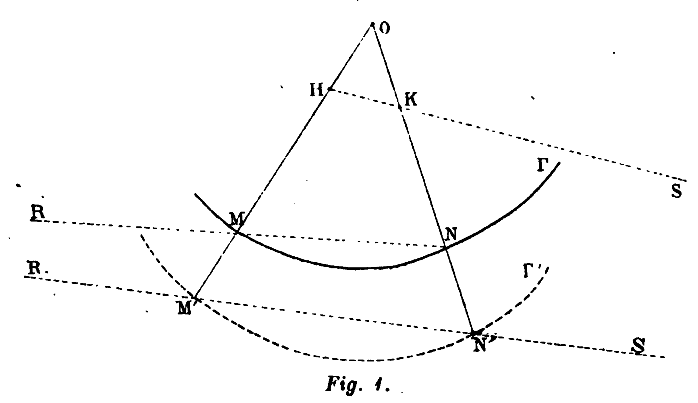


Fig. 1.

donc $MM' = NN' = h$. Si, à partir du point O, nous portons

$$OH = OK = h,$$

nous pouvons considérer les droites HK et MN comme deux transversales réciproques du triangle OM'N'. Conséquemment, les points R et S, points de rencontre de ces transversales avec le troisième côté M'N' du triangle OM'N', sont deux points symétriques, relativement au milieu de M'N'.

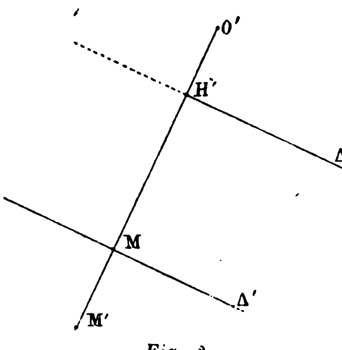


Fig. 2.

Cette remarque étant faite, supposons que le point N se rapproche de M, et vienne se confondre avec lui; HK a pour position limite une droite Δ perpendiculaire à OM, au point H; MN devient la tangente en M à Γ, c'est-à-dire une perpendiculaire Δ à OM au point M; enfin M'N', à la limite, est la tangente à Γ', au point M'.

Par suite, ayant pris (*fig.* 2) $O'H' = MM' = h$, pour obtenir la tangente au point M' à Γ', il faudra mener par M' une droite partagée en deux parties égales par les parallèles Δ, Δ', preuve donc que la tangente à Γ', au point M', est parallèle à Δ'.

De là résulte immédiatement que *les points correspondants de deux courbes parallèles ont le même centre de courbure ou, en d'autres termes, que deux courbes parallèles admettent la même développée* (*).

2. — Nous signalerons aussi, pendant que nous sommes sur ce sujet, d'autres applications des transversales réciproques au tracé des tangentes. Ces applications touchent de très près à la précédente, elles nous ont été inspirées par elle.

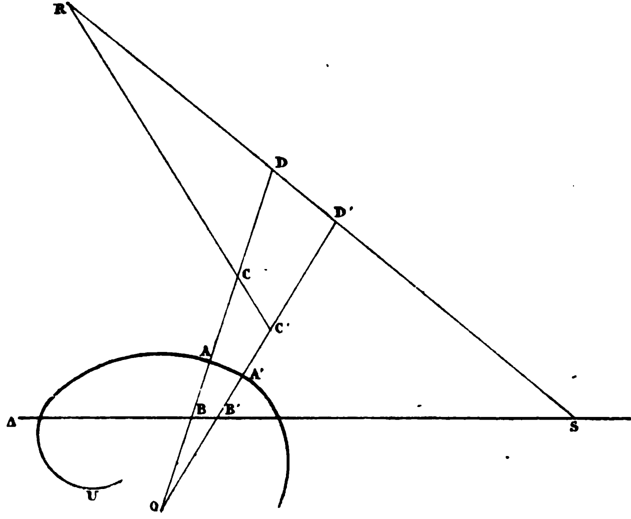
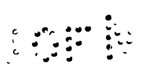


Fig. 3.

Imaginons une courbe U et une droite Δ; prenons sur U un point quelconque A et construisons la normale en ce point. Cette droite rencontre Δ en B; prenons AC = AB. Le lieu décrit par C est une certaine courbe V; proposons-nous de trouver la tangente à V, au point C.

A cet effet considérons sur U un point A′, voisin de A, et soient B′, C′ les points analogues de B et de C. Prenons maintenant CD = OB, et C′D′ = OB′; les droites BB′, CC′ sont deux transversales réciproques au triangle ODD′; par

(*) Voyez Bertrand, *Calcul différentiel*, pp. 12 et 83.



suite CC′ et BB′ rencontrent DD′ en deux points R, S symétriquement placés par rapport au milieu de DD′. Il faut aussi observer que, d'après la construction indiquée, DD′ est parallèle à AA′; enfin que AD = OA.

Passons à la limite; et supposons que A′ vienne se confondre avec A. Le point O a pour position limite le point ω, centre de courbure de U, au point A. Prenons Aδ = ωA; et, par δ, menons une parallèle à la tangente AT. Nous obtenons

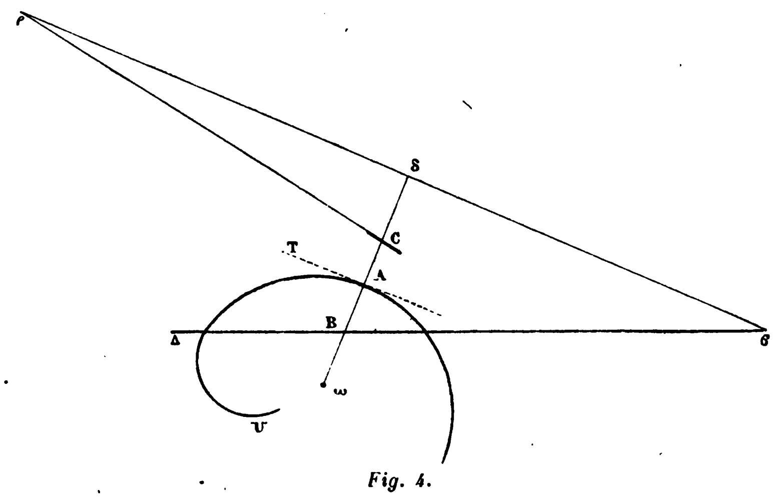


Fig. 4.

ainsi un certain point σ; et la tangente cherchée passe par ρ, point symétrique de σ, par rapport à δ.

On voit aisément comment il faut modifier la construction précédente quand la droite Δ est remplacée par une courbe quelconque. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons d'indiquer dans ce nouveau travail comment on peut établir, conformément aux principes déve-



loppés précédemment (*), la théorie des aires et des volumes. Ce travail s'adressant plus spécialement aux personnes versées dans les mathématiques, nous nous bornerons, dans la plupart des cas, à énoncer les théorèmes ; nous ne donnerons la démonstration que dans les passages un peu délicats.

§ 1. — *Moment des contours fermés.*

Soient dans un plan un segment AB, défini en grandeur, direction et sens, et un point F ; le moment de AB par rapport à F est le produit $AB \times FH$, FH étant la perpendiculaire abaissée de F sur AB ; c'est la définition même donnée en mécanique ; le moment peut être positif ou négatif ; il est nul, soit quand AB est nul, soit quand AB passe par le point F.

Fig. 1.

Soit, dans un plan, une ligne polygonale AB ... G décrite dans le sens de A à G ; le moment de cette ligne par rapport à un point F de ce plan est la somme algébrique des moments de ses divers côtés par rapport à F.

Théorème I. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments du segment* AB *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* ab *la projection de* AB *sur la direction* OZ *normale à* FF_1, *on a* $\mu_1 - \mu = FF_1 \times ab$.

Fig. 2.

Théorème II. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de la ligne polygonale* AB *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* ab *la projection de* AB *sur la normale* OZ *à* FF_1, *on a* $\mu_1 - \mu = FF_1 \times ab$.

(*) Voyez *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1884.

Théorème III. — *Le moment d'une ligne polygonale fermée est constant pour un point quelconque du plan.*

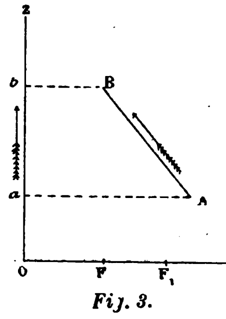


Fig. 3.

Si en effet le contour se ferme on a dans le théorème précédent $ab = o$ et par suite $\mu_1 = \mu$.

Nous appellerons ce moment constant moment du contour.

Théorème IV. — *Si un contour fermé résulte du groupement de plusieurs contours fermés partiels, le moment du contour total est la somme des moments des contours partiels.*

Soient par exemple deux contours partiels adjacents par la partie AB, on voit immédiatement qu'en prenant les moments par rapport à un point quelconque du plan, la partie commune AB donne des moments égaux et le signe contraire dans les contours partiels; par suite ces moments disparaissent dans la somme.

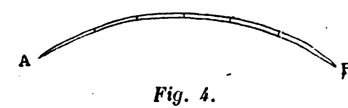


Fig. 4.

Théorème V. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments des segments* AB *et* A_1B_1, *inscrits dans un même angle* AFB, *par rapport au sommet* F *de cet angle, on a :*

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{FA.FB}{FA_1.FB_1}.$$

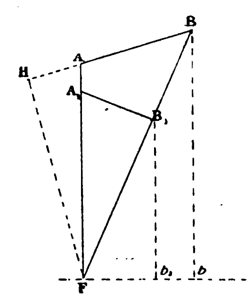


Fig. 5.

Projetons en effet B et B_1 en b et b_1 sur la normale FK à FA, le moment μ ou AB $\times$ FH de AB est aussi égal à Fb $\times$ FA; on a de même

$$\mu_1 = Fb_1 \times FA;$$

on en déduit

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{FA}{FA_1} \cdot \frac{Fb}{Fb_1} = \frac{FA}{FA_1} \cdot \frac{FB}{FB_1}.$$

Corollaire. — *Si les points* A_1 *et* B_1 *sont plus voisins de* F *que* A *et* B, *on a* $\mu > \mu_1$.

Théorème VI. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de deux lignes polygonales* AMB *et* ANB *par rapport à un point* F; *si la ligne* ANB *est intérieure à la ligne* AMB *par rapport à ce point* F, *on a* $\mu > \mu_1$.

On le voit immédiatement en décomposant les deux lignes par des rayons vecteurs issus de F et passant par les sommets des deux lignes; il suffit alors d'appliquer le corollaire précédent aux éléments du contour compris entre deux rayons consécutifs.

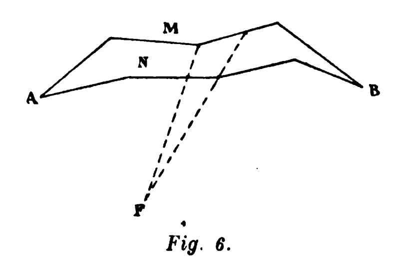


Fig. 6.

Le théorème est encore vrai pour deux contours fermés, l'un contenant l'autre; le moment du contour intérieur est plus petit que le moment du contour extérieur; il n'importe pas que les contours soient concaves ou convexes.

Théorème VII. — *Soient un arc de courbe* AMB *et une ligne polygonale* ANB *à côtés infiniment petits et infiniment voisine de l'arc, c'est-à-dire telle que chaque côté en s'annulant devienne un point de cet arc; le moment de la ligne polygonale par rapport à un point* F *a une limite constante, quelle que soit la manière dont cette ligne se déforme pour se confondre avec l'arc.*

1° Si en effet nous considérons deux positions successives de la ligne ANB, la position la plus voisine de l'arc est enveloppante par rapport à l'autre et a par suite un moment plus grand (Th. VI); donc le moment augmente quand la ligne se rapproche de l'arc; ce moment est d'ailleurs toujours inférieur à celui d'une ligne polygonale AN'B enveloppant l'arc : donc, ce moment a une limite.

2° Soient maintenant deux lignes différentes ANB et AN_1B tendant toutes deux à se confondre avec l'arc; on peut toujours considérer ces deux lignes comme composées d'élé-

ments rectilignes correspondants ab et a_1b_1; si μ et μ_1 sont les moments de ces éléments on a (Th. V)

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{Fa \,.\, Fb}{Fa_1 \,.\, Fb_1};$$

or les deux éléments venant à la limite se confondre en un même point de l'arc, on a

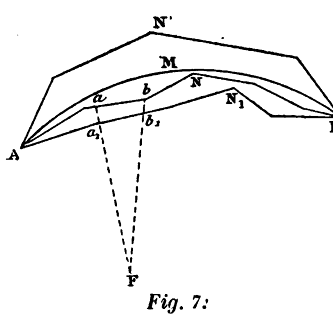


Fig. 7:

$$\lim.\frac{Fa}{Fa_1} = 1 \text{ et } \lim.\frac{Fb}{Fb_1} = 1$$

et par suite

$$\lim.\frac{\mu}{\mu_1} = 1:$$

dès lors, les moments des lignes ANB et AN_1B étant les sommes respectives des éléments μ et μ_1, ces moments ont même limite.

Cette limite constante du moment des lignes polygonales infiniment voisines de l'arc AB est, par définition, le moment de l'arc.

Remarque I. — Il n'est pas nécessaire que, dans les lignes polygonales en question, les côtés prennent la direction de la tangente à la courbe, ainsi qu'on le suppose dans la définition de la longueur de l'arc.

Remarque II. — Le moment d'un arc étant ainsi défini, nous étendrons immédiatement à l'arc les théorèmes précédents II, III, IV et VI, relatifs aux lignes polygonales.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

* **16.** — *Soit l'équation*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \qquad (1)$$

dont les trois racines sont a, b, c; *calculer la fonction symétrique* U,

$$U = (a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab).$$

Première solution. — On peut d'abord observer que

$$U \cdot abc = (a^3 + r)(b^3 + r)(c^3 + r),$$

relation qui peut encore s'écrire

$$- U = (pa + q)(pb + q)(pc + q).$$

On trouve, finalement,

$$U = - q^3 + p^3 r.$$

Deuxième solution. — Proposons-nous de transformer l'équation (1), la formule de transformation étant

$$y = a^2 - bc.$$

Nous avons

$$ay = a^3 - abc = a^3 + r = - pa^2 - qa,$$

ou

$$- a = \frac{y + q}{p}.$$

En substituant cette valeur de a, dans la relation

$$a^3 + pa^2 + qa + r = 0,$$

nous obtenons, tout calcul fait, l'équation suivante :

$$y^3 + (3q - p^2)y^2 + q(3q - p^2)y + q^3 - rp^3 = 0.$$

17. — *On donne le quotient* Q *et le reste* A *obtenus en divisant un polynôme* P *par* x — a; *soient, de même,* Q' *le quotient et* B *le reste de la division de* P *par* x — b. *Trouver le quotient* Q'' *et le reste* mx + n, *donnés par la division de* P *par le produit* (x — a)(x — b). *On suppose* a — b ≠ 0.

Les identités :

$$P \equiv (x - a)Q + A,$$
$$P \equiv (x - b)Q' + B,$$

donnent, par combinaison,

$$P(x - b) - P(x - a) \equiv (x - a)(x - b)(Q - Q') + x(A - B) + Ba - Ab.$$

On en conclut

$$P \equiv (x - a)(x - b)\frac{Q - Q'}{a - b} + x\frac{A - B}{a - b} + \frac{Ba - Ab}{a - b},$$

et, par suite,

$$Q'' = \frac{Q - Q'}{a - b},$$

$$m = \frac{A - B}{a - b},$$
$$n = \frac{Ba - Ab}{a - b}.$$

18. — *Résoudre l'équation*

$$3x^3 - 3x + 1 = 0.$$

En appliquant la méthode trigonométrique on trouve sans difficulté que les trois racines sont :

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 10^\circ,$$
$$-x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 50^\circ,$$
$$-x_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 70^\circ.$$

Parmi les conséquences qui découlent naturellement de ce résultat, on peut remarquer la suivante :

$$\sqrt{3} = 8 \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ.$$

Remarque. — On rencontre quelques équations du troisième degré dont les racines peuvent, comme dans celle qui précède, être exprimées par les sinus ou cosinus d'arcs renfermant un nombre exact de degrés.

Nous citerons, à ce propos, l'équation

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

qui a été résolue par F. Viète.

Les racines sont :

$$2 \cos 20^\circ, \quad 2 \cos 40^\circ, \quad 2 \cos 80^\circ.$$

Elles donnent l'égalité, facile à vérifier,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \ (*).$$

Nous indiquerons aussi l'équation

$$x^3 - 3x + 2 \sin \alpha = 0,$$

dont les racines sont :

$$2 \sin \frac{\alpha}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$

(*) L'Annuaire du Congrès de Montpellier (1879), d'où nous avons extrait cette relation, renferme, par erreur, cos 50° au lieu de cos 40°.

Cette dernière équation a été considérée par M. Hermite dans son mémoire relatif à la résolution de l'équation du cinquième degré.

19. — *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$x^3 + y^4 = 1.$$

Cette courbe est constituée par une branche unique, parabolique. Elle offre la particularité intéressante d'avoir *quatre points d'inflexion réels*. Les tangentes inflexionnelles ont pour équation, respectivement :

$$y = \pm 1, \quad x \pm y\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Les points d'inflexion qui correspondent à cette dernière équation ont une abcisse commune égale à -2.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique, déduits de la considération des coordonnées parallèles, par *Maurice d'Ocagne*, élève ingénieur des ponts et chaussées, vice-secrétaire de la Société mathématique de France. (Paris, Gauthier-Villars, 1885; prix 3 francs.)

Si nous imaginons deux droites fixes Δ, Δ' dans un plan P, et, sur ces droites, deux origines O, O'; une droite D du plan P rencontre Δ et Δ' en des points A, A'. En posant

$$OA = u, \quad OA' = v,$$

on peut dire que u et v, valeurs prises en grandeur et en signe, déterminent la position de AA' dans le plan P; en d'autres termes, u et v sont les coordonnées de D. C'est le système bien connu des coordonnées tangentielles. On peut observer pourtant que, dans cette définition, un peu plus générale que celle qu'on donne habituellement, rien n'empêche de supposer que les droites fixes Δ, Δ' soient parallèles. On obtient ainsi le système de coordonnées parallèles de M. Maurice d'Ocagne.

Dans les coordonnées axiales, on détermine la position d'une droite dans le plan P de la manière suivante. Imaginons un axe fixe Δ et, sur cette droite, une origine fixe O; une droite D est déterminée par l'angle qu'elle fait avec Δ et par la distance de l'origine au point commun à D et à Δ.

Ces coordonnées axiales constituent d'ailleurs un cas particulier des coordonnées tangentielles qui ont été étudiées par M. l'abbé Aoust (*).

Ainsi, les deux systèmes de coordonnées étudiés par M. Maurice d'Ocagne sont simplement des cas particuliers de systèmes plus généraux de coordonnées tangentielles. L'examen de ces cas particuliers offre pourtant, le plus souvent, un intérêt personnel et le livre que nous signalons à nos lecteurs en est bien la preuve. En effet, dans les questions si diverses que soulève l'analyse, l'emploi des coordonnées qui leur conviennent plus particulièrement varie sans cesse. A chacune d'elles correspondent ce que l'on pourrait appeler, en généralisant le mot même de M. l'abbé Aoust, *des coordonnées naturelles;* ces coordonnées permettant de mettre en évidence, le plus simplement possible, les éléments qui jouissent de la propriété qui sert de définition à la courbe.

Le livre de M. Maurice d'Ocagne contient un grand nombre d'exercices pouvant intéresser les élèves de mathématiques spéciales; d'ailleurs, sa lecture n'exige que les connaissances mathématiques qu'ils possèdent. Ils y trouveront l'exposition des deux systèmes de coordonnées tangentielles que nous avons résumés plus haut et qui donnent lieu à de nombreuses applications, en choisissant de préférence celles-ci dans un champ convenable, et parmi celles qui admettent les coordonnées en question pour coordonnées naturelles.

Nous signalerons encore, en terminant cette analyse, le chapitre qui est consacré au calcul graphique.

On sait quel procédé on indique, dans nos cours de mathématiques spéciales, pour construire graphiquement les racines d'une équation du troisième degré :

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Après avoir posé $x^2 = y$, on obtient, par combinaison, l'équation

$$x^2 + y^2 + (p - 1)y + qx = 0.$$

Mais, au point de vue pratique, une difficulté se présente ici; c'est la construction du cercle qui correspond à cette équation. Dans cet ordre d'idées, et en prenant l'équation plus générale visée par M. d'Ocagne (**),

$$x^n + px + q = 0. \qquad (1)$$

Nous pensons qu'il est préférable de prendre pour *solutive* la courbe qui correspond à l'équation

$$y + x^n = 0.$$

On obtiendrait alors les racines de l'équation (1) au moyen d'une courbe tracée une fois pour toutes, et d'une droite Δ ayant pour équation

$$y = px + q.$$

Pour construire cette droite Δ, on pourrait imaginer les parallèles U, V ($x = 1$, $x = -1$) à l'axe oy. Ces droites étant cotées, comme le sont les axes parallèles de M. d'Ocagne, on tracerait Δ en prenant sur U la cote $p + q$, et sur V la cote $p - q$. Comme vérification, la droite doit couper oy à la cote q.

Dans cette manière de faire, on pourra utiliser la remarque faite par

(*) *Analyse infinitésimale des courbes planes*, par M. l'abbé Aoust; Gauthier-Villars, 1873; p. 65.

(**) M. d'Ocagne a choisi ce type parce que c'est celui (pour $n = 2$ et $n = 3$) qui intéresse le plus la pratique; mais sa méthode est applicable à une équation trinôme quelconque $x^m + px^n + q = 0$, ce qui n'a pas lieu pour le procédé indiqué ici en coordonnées cartésiennes.

M. d'Ocagne (p. 77) et dans laquelle il observe qu'*après avoir construit le tableau graphique, on doit le compléter par un transparent sur lequel une droite est marquée par un trait fin.*

Telle nous paraît être. appliquée au système cartésien, l'idée que M. d'Ocagne a rencontrée dans le système des coordonnées parallèles; au point de vue pratique, elle réalise un progrès notable sur les méthodes ordinaires.

Nous signalerons enfin quelques notes intéressantes placées à la fin du livre et, particulièrement, la note III relative à la transformation orthotangentielle, transformation dont M. d'Ocagne a fait connaître le principe dans ce Journal (*).

CALENDRIER PERPÉTUEL A ROULETTE, par M. *Ed. Lucas*, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. E. Belin, éditeur, 52, rue de Vaugirard, prix 0 fr. 75 c.

M. Ed. Lucas a exposé au Congrès de Rouen, de l'Association française pour l'avancement des sciences, l'ingénieuse théorie qui a présidé à la confection du calendrier perpétuel que nous signalons à l'attention des lecteurs de ce Journal. L'auteur distingue, dans une date donnée, *quatre éléments* :

1° Le QUANTIÈME, ou numéro du jour dans le mois;

2° Le nom du MOIS;

3° Le numéro du SIÈCLE : ce nombre est obtenu en supprimant les deux derniers chiffres de la date

4° Le numéro de 'ANNÉE: celui-ci est formé, au contraire, par les deux derniers chiffres.

Avec ces éléments, en se reportant à une règle rapide et simple indiquée par M. Ed. Lucas, on peut retrouver sans effort le *nom* du jour qui correspond à a date proposée (**). G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

165. — On considère une ellipse Γ et la tangente Δ en un sommet A extrémité du grand axe de cette courbe; on trace une tangente mobile Δ', puis une seconde tangente Δ'' parallèle à celle-ci. La droite Δ'' rencontre Δ en un point M et l'on projette enfin M sur Δ'. Soit I cette projection.

On propose de trouver le lieu décrit par I.

Ce lieu est une courbe du cinquième ordre ayant sur l'axe

(*) V. Journal, p. 33.

(**) Les appareils à calculs exacts et instantanés de MM. Genaille et Lucas paraîtront incessamment à la librairie classique E. Belin, où l'on peut demander, dès maintenant, le prospectus.

AA′ deux points doubles; l'un d'eux est réel, l'autre imaginaire. On discutera la forme générale de la courbe qui correspond à l'équation trouvée. On fera voir notamment qu'elle est renfermée tout entière entre les droites ($x + a = 0$, $x - 3a = 0$), et qu'elle est doublement tangente au cercle qui est circonscrit au rectangle formé par l'axe oy, la droite Δ et les parallèles à ox menées par les sommets B et B′.

(*G. L.*)

166. — Résoudre les équations:

$$yz - u^2 = a, \qquad vw - ux = d,$$
$$zx - v^2 = b, \qquad wu - vy = e,$$
$$xy - w^2 = c, \qquad uv - w^2z = f.$$

WALECKI.

167. — Une conique étant définie par les points ABCDE et une autre conique par les points ABFGH, construire par la règle et le compas les autres points d'intersection de ces deux coniques. AMIGUES.

168. — On donne deux points A et A′ et le milieu O de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution du second ordre qui passent en A et en A′ et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point O.

1° Lieu du point de contact du plan tangent perpendiculaire à A A′;

2° Lieu, des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces;

3° En supposant l'excentricité de la méridienne donnée, on demande le lieu des pôles précédents, le lieu des sommets de la surface, le lieu du centre de la surface.

Vérifier géométriquement les résultats simples que l'on trouvera. AMIGUES.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13430-5.

NOTE SUR L'ÉQUATION EN λ

Par **E. Amigues.**

I. — *Cas général.*

L'équation en λ, qui donne les couples de sécantes communes à deux coniques et les plans des sections homothétiques de deux quadriques, s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique

$$\varphi(x, y, z) + \lambda\, \varphi_1(x, y, z).$$

De cette origine découlent naturellement ses deux propriétés fondamentales.

1° Si l'équation en λ admet des racines imaginaires, les deux coniques représentées par les équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0,$$

se coupent en deux points réels et deux points imaginaires.

Soit en effet $\alpha + \beta i$ une de ces racines imaginaires. On a

$$\varphi(x, y, z) + (\alpha + \beta i)\varphi_1(x, y, z) \equiv (P + Qi)(R + Si),$$

P, Q, R, S étant des formes linéaires à coefficients réels. Le second membre s'annule pour deux solutions réelles et deux seulement. Il en est donc de même du premier. Or les solutions réelles qui annulent le premier membre sont les solutions réelles du système

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) + \alpha\varphi_1(x, y, z) &= 0, \\ \beta\varphi_1(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

ou du système équivalent

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= 0, \\ \varphi_1(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Ce système a donc deux solutions réelles, et pas davantage.

2° Si l'équation en λ n'a pas de racines imaginaires, les deux coniques se coupent : ou en quatre points réels, ou en quatre points imaginaires.

En effet, toute racine réelle de l'équation en λ donnera une identité telle que

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) \equiv \pm P^2 \pm Q^2,$$

P et Q étant des formes linéaires à coefficients réels.

Supposons en premier lieu que deux au moins des racines donnent des carrés de signes contraires. Alors on aura, pour deux des racines,

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) \equiv PQ,$$
$$\varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_1(x, y, z) \equiv RS,$$

P, Q, R, S étant à coefficients réels.

Les deux seconds membres s'annulent simultanément pour quatre solutions réelles et quatre seulement. Il en est donc de même des deux premiers; donc le système d'équations

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_1(x, y, z) = 0,$$

admet quatre solutions réelles, et il en est de même du système équivalent

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Supposons en second lieu que deux au moins des racines donnent des carrés de même signe, on aura pour ces deux racines :

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) \equiv \pm (P^2 + Q^2),$$
$$\varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_1(x, y, z) \equiv \pm (R^2 + S^2)$$

on voit alors comme tout à l'heure que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} P^2 + Q^2 = 0, \\ R^2 + S^2 = 0, \end{array} \right. \qquad (1)$$

est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \varphi_1(x, y, z) = 0. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Nous allons montrer que les coniques se coupent en quatre points imaginaires, ou bien que le système (2) n'a pas de solution réelle, ou bien que le système (1) n'en a pas.

En effet, si le système (1) admettait des solutions réelles, ces solutions annuleraient P, Q, R, S. Mais alors les deux couples de sécantes communes ayant le même centre, les coniques seraient donc tangentes et l'on ne serait plus dans le cas général.

(A suivre.)

SUR LES
POINTS MULTIPLES DES COURBES PLANES

Par M. **Porchon**, professeur au Lycée de Versailles.

La note que nous présentons ici n'ajoute rien d'essentiel à la théorie des points multiples des équations algébriques, développée dans de récents ouvrages classiques, mais il nous paraît qu'elle en simplifie l'exposition et l'application. Nous supposons connue la distinction entre les infiniments petits des différents ordres.

Supposons qu'un point multiple, d'ordre de multiplicité p, ait été pris pour origine des coordonnées. Désignons par $x^i\varphi_i\left(1, \frac{y}{x}\right)$ l'ensemble des termes de degré i et considérons l'équation de la courbe sous la forme

$$\varphi_p\left(1, \frac{y}{x}\right) + x\varphi_{p+1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots + x^{m-p}\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0. \quad (1)$$

Soit a une des p racines de l'équation en $\frac{y}{x}$:

$$\varphi_p\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0, \quad (2)$$

et par conséquent, le coefficient angulaire d'une des tangentes au point multiple. Posons $\frac{y}{x} = a + \lambda$; en développant chaque terme de l'équation (1), et en désignant par A^r la p^e dérivée de $\varphi_i\,(1, a)$, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{ll|l|l}
A_p & + A^1_p & \lambda + A^2_p & \frac{1}{2}\lambda^2 \dots \\
+ A_{p+1}\,x & + A^1_{p+1}\,x & \quad + A^2_{p+1}x & \\
+ A_{p+2}\,x^2 & + A^1_{p+2}\,x^2 & \quad + A^2_{p+2}x^2 & \\
\dots & \dots & \quad \dots & \\
\dots & \dots & \quad \dots & \\
+ A_{p+i}\,x^i & \dots & & \\
\dots & \dots & & \\
\dots & \dots & & \\
A_m\,x^{m-p} & + A^1_m x^{m-p} & &
\end{array}\right\} = 0 \quad (3)$$

A_p est nul par hypothèse, et λ tend vers zéro en même temps que x. Il s'agit, pour résoudre le problème, de trouver le premier terme, ou, au besoin, les premiers termes de cette quantité ordonnée suivant les puissances croissantes de x. C'est ce qui se fera par la règle suivante.

Les termes de l'équation (3) *ayant été ordonnés en rangées horizontales et en colonnes verticales équidistantes, suivant les indices inférieurs et supérieurs des coefficients, c'est-à-dire suivant les puissances de* x *et de* λ, *on forme la ligne brisée convexe qui, ayant pour sommets les premiers termes non nuls de certaines rangées horizontales, tourne sa convexité vers l'angle supérieur gauche du tableau. Alors, on néglige tous les termes placés en dedans de cette ligne brisée, et en égalant à zéro la somme des termes placés sur chacun des côtés de la ligne brisée convexe, on aura des équations en* λ *dont chaque racine sera le premier terme d'une des valeurs cherchées de cette inconnue.* Cette première approximation sera suffisante sauf le cas où quelqu'une de ces équations aura des racines égales.

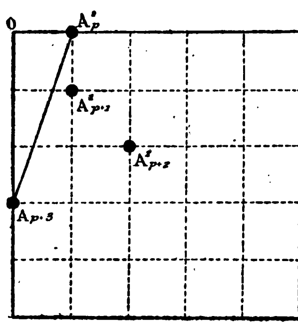


Fig. 1.

Par exemple, si les premiers coefficients qui ne s'annulent pas sont : A^1_p, A^1_{p+1}, A^2_{p+2}, A_{p+3} (*fig. 1*), la ligne brisée convexe se réduit à la droite $A^1_p\ A_{p+3}$ (en n'écrivant que les coefficients), et il n'y a qu'une équation en λ,

$$A^1_p\lambda + A_{p+3}x^3 = 0. \quad (4)$$

Si les premiers termes qui ne s'annulent pas sont A^5_p, A^3_{p+1}, A^2_{p+2}, A^1_{p+3}, A^2_{p+4}, A^1_{p+5}, A_{p+6} (*fig. 2*), la ligne brisée convexe se compose des trois droites $A^5_p\ A^3_{p+1}$, $A^3_{p+1}\ A^1_{p+3}$, $A^{1+3}_p\ A_{p+6}$, et les équations en λ (première approximation) sont :

$$A^5_p \cdot \frac{\lambda^5}{1.2.3.4.5} + A^3_{p+1}x \cdot \frac{\lambda^3}{1.2.3} = 0, \quad (5)$$

$$A^3_{p+1}x \cdot \frac{\lambda^3}{1.2.3} + A^2_{p+2}x^2 \cdot \frac{\lambda^2}{1.2} + {}^1_{+3}x^3\lambda = 0, \quad (6)$$

$$A^1_{p+3}x^3\lambda + A_{p+6}x^6 = 0, \quad (7)$$

dont les deux premières devront être divisées respectivement par λ^2 et λ.

Pour démontrer cette règle, il suffit d'observer que λ étant regardé comme infiniment petit de l'ordre θ par rapport à x, le terme $A^q_{p+i}\lambda^q x^i$ est de l'ordre $q\theta + i$. Ainsi, les termes de même ordre sont ceux par lesquels il y a entre q et i une relation de la forme

$$q\theta + i = \text{constante}. \qquad (8)$$

C'est l'équation d'une droite si l'on regarde i et q comme l'ordonnée et l'abscisse du point où ce terme est écrit, la première colonne verticale à gauche et la ligne horizontale supérieure comme axes des ordonnées et des abscisses. Tous les termes non situés sur la droite sont d'un ordre supérieur, puisque la fonction $q\theta + i$ a pour chacun d'eux une valeur plus grande que pour un point de la droite.

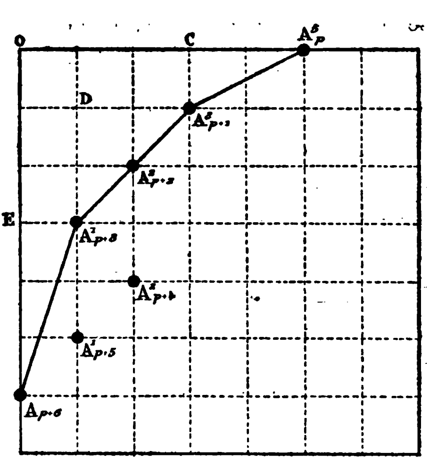


Fig. 2.

Ainsi le rapport $\frac{\lambda}{x^\theta}$ a pour limite une quantité finie b, et si l'on pose $\lambda = bx^\theta$, l'équation entre les termes placés sur la même droite, divisée par x^θ, est une équation en b. Comme b n'est pas nul, par hypothèse, on divise l'équation par la puissance de b qu'elle peut contenir en facteur. Alors la question est tranchée par la résolution de chacune des équations en b, à moins que l'une d'entre d'elles n'ait des racines égales.

En effet, pour chaque valeur de b, on trouve

$$y = ax + bx^\theta + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit par rapport à bx^θ. La quantité θ,

coefficient angulaire de la droite représentée par l'équation (8), est évidemment rationnelle. Supposons que la fraction θ, réduite à sa plus simple expression, ait un dénominateur impair; écrivons-la sous la forme $\frac{f}{2g+1}$. Le terme bx^θ peut s'écrire $b\sqrt[2g+1]{x^f}$. Alors, si b est réel, on peut donner à x des valeurs positives ou négatives indifféremment et il en résulte pour $y - ax$ des valeurs qui changent de signe avec x si le numérateur de θ est impair, et qui conservent le signe de b si ce numérateur est pair. A la valeur de b correspond une branche de courbe tangente à la droite $y = ax$; elle est située au-dessus de cette tangente si bx^θ est positif, au-dessous dans le cas contraire. Elle présente donc ou non une inflexion à l'origine, suivant que le numérateur de θ est impair ou pair.

Si θ a un dénominateur pair, écrivons-le sous la forme $\frac{f}{2g}$, f étant impair. Alors nous écrirons bx^θ sous la forme $\pm\sqrt[2]{b^{2g}x^f}$. Si b^{2g} est réelle, on peut donner à x des valeurs de même signe que b^{2g}, et il en résulte deux branches de courbe tangentes à la droite $y = ax$, de part et d'autre de cette tangente et s'arrêtant au point de contact de manière à former un point de rebroussement de première espèce.

D'après ces remarques, les caractères de la branche de courbe dans son voisinage avec l'origine dépendent de la parité du numérateur et du dénominateur de θ, qui n'est autre que le coefficient angulaire de la droite sur laquelle sont disposés les termes considérés de l'équation.

Par exemple pour la droite $A_p^1A_{p+3}$ (*fig. 1*), θ est représenté par le rapport $\frac{OA_{p+3}}{OA_p^1}$ égal à $\frac{3}{2}$; pour les droites $A_p^5A_{p+1}^3$, $A_{p+1}^3A_{p+3}^1$, $A_{p+3}^1A_{p+}$ (*fig. 2*), par $\frac{CA_{p+1}^3}{CA_p^5}$, $\frac{DA_{p+3}^1}{DA_{p+1}^3}$, $\frac{EA_{p+6}}{AE_{p+3}^1}$, égaux respectivement à $\frac{1}{2}$, 1, 3. Ainsi, la simple inspection de l'équation fait apprécier la forme de la branche de courbe sauf le cas

des racines multiples de l'équation en λ. Cette particularité exceptée, deux cas peuvent se présenter :

1° Si θ est de forme $\frac{f}{2g+1}$, à chaque valeur réelle de b correspond une branche de courbe, infléchie ou non à l'origine suivant que f est impair ou pair.

2° Si θ est de forme $\frac{f}{2g}$, ce qui suppose f impair, à chaque valeur réelle de b^{2g} correspondent deux branches formant un point de rebroussement de première espèce.

(A suivre.)

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE
DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

La méthode de résolution indiquée dans ce Journal (année 1883, p. 102) repose sur ces deux propriétés :

1° Le premier membre de l'équation est décomposable en la somme des cubes de deux fonctions linéaires ; 2° ces deux fonctions linéaires sont les facteurs du premier degré du Hessien (à un coefficient numérique près). Nous nous proposons de démontrer ces deux propriétés simultanément, par une substitution linéaire.

Soit $f(x, t)$ le premier membre rendu homogène.

Posons

$$y = \frac{x-\alpha}{x-\beta},$$

d'où

$$x = \frac{\beta y - \alpha}{y - 1}.$$

Développant $f(\beta y - \alpha, y - 1)$ par la formule de Taylor, puis annulant les coefficients de y^2 et de y, l'équation devient

$$y^3 f(\beta, 1) - f(\alpha, 1) = 0,$$

avec les conditions :

$$\alpha f'_{\beta} + f'_t = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha^2 f''_{\beta^2} + 2\alpha f''_{\beta t} + f''_{t^2} = 0, \qquad (2)$$

[dérivées prises sur $f(\beta, t)$].

Ces deux conditions écrites sous la forme

$$\alpha[\beta f''_{\beta^2} + f''_{\beta t}] + \beta f''_{\beta t} + f''_{t^2} = 0,$$

$$\alpha[\alpha f''_{\beta^2} + f''_{\beta t}] + \alpha f''_{\beta t} + f''_{t^2} = 0,$$

entraînent l'égalité

$$\begin{vmatrix} \beta f''_{\beta^2} + f''_{\beta t} & \beta f''_{\beta t} + f''_{t^2} \\ \alpha f''_{\beta^2} + f''_{\beta t} & \alpha f''_{\beta t} + f''_{t_2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\beta - \alpha)\begin{vmatrix} f''_{\beta^2} & f''_{\beta t} \\ f''_{\beta t} & f''_{t^2} \end{vmatrix} = 0.$$

L'hypothèse $\beta = \alpha$, qui exige encore $f(\alpha, 1) = 0$, doit être écartée ; elle ramène d'ailleurs l'équation à la forme identique $0 \equiv 0$.

L'hypothèse

$$\begin{vmatrix} f''_{\beta^2} & f''_{\beta t} \\ f''_{\beta t} & f''_{t^2} \end{vmatrix} = 0,$$

exprime que β est une racine du Hessien égalé à zéro. Prenant pour β l'une de ses deux racines, les deux valeurs de α données par (2) deviennent égales à celle donnée par (1). D'autre part, le système des conditions (1) et (2) étant symétrique par rapport à α et β, cette valeur de α est l'autre racine du Hessien égalé à zéro.

Dès lors, ce Hessien est, à un facteur numérique près, identique au produit $(x - \alpha)(x - \beta)$ et puisque l'équation devient, quand on remplace y,

$$(x - \alpha)^3 f(\beta, 1) - (x - \beta)^3 f(\alpha, 1) = 0,$$

les deux propositions sont établies.

Remarque I. — On a

$$(\beta - \alpha)^3 f(x, 1) \equiv (x - \alpha)^3 f(\beta, 1) - (x - \beta)^3 f(\alpha, 1),$$

ce qui permet d'effectuer la décomposition sur un *polynôme* du troisième degré.

REMARQUE II. — En éliminant α entre (1) et (2), le résultant indique encore l'identité

$$f''_{\beta^2}(f'_t)^2 - 2f''_{\beta t}f'_\beta f'_t + f''_{t^2}(f'_\beta)^2 \equiv -\frac{3}{2}f(\beta, 1)[f''_{\beta^2}f_{t^2} - (f''_{\beta t})^2].$$

SUR LES COURBES PARALLÈLES
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 131.)

---

3. — Considérons maintenant deux courbes quelconques U et V ; prenons sur U un point A. La normale à U, en A, coupe V au point B; le lieu décrit par le milieu I de AB est une certaine courbe W et nous nous proposons de trouver la tangente à W, au point I.

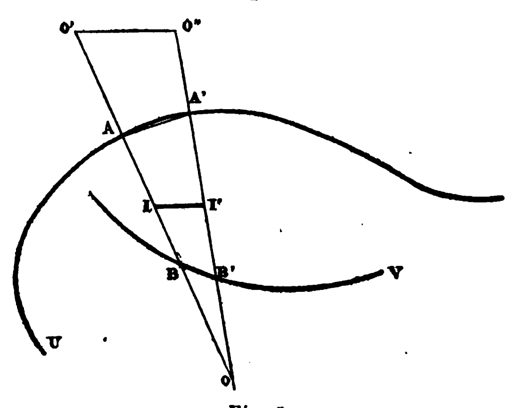


Fig. 5.

Soit A′B′ une normale à U, voisine de AB; ayant pris AO′ = BO et A′O″ = B′O, nous obtenons un triangle OO′O″ dans lequel AA′ et BB′ sont deux transversales réciproques. En passant à la limite, le point O devient le centre de courbure de la courbe U au point A et un tracé tout semblable à celui que nous avons indiqué (§ 2) fait connaître la position limite de O′O″ et, par suite, celle de sa parallèle II′.

4. — Parmi les applications que l'on peut faire de la construction précédente, nous signalerons la suivante.

Prenons pour U une parabole ($y^2 - 2px = 0$), pour V un

diamètre $(y = h)$; le lieu décrit par le point I est une cubique Γ ayant pour équation

$$x = \frac{(2y - h)^3 + 2p^2(y - h)}{2p(2y - h)}.$$

Cette courbe, qui a la forme indiquée par la figure ci-

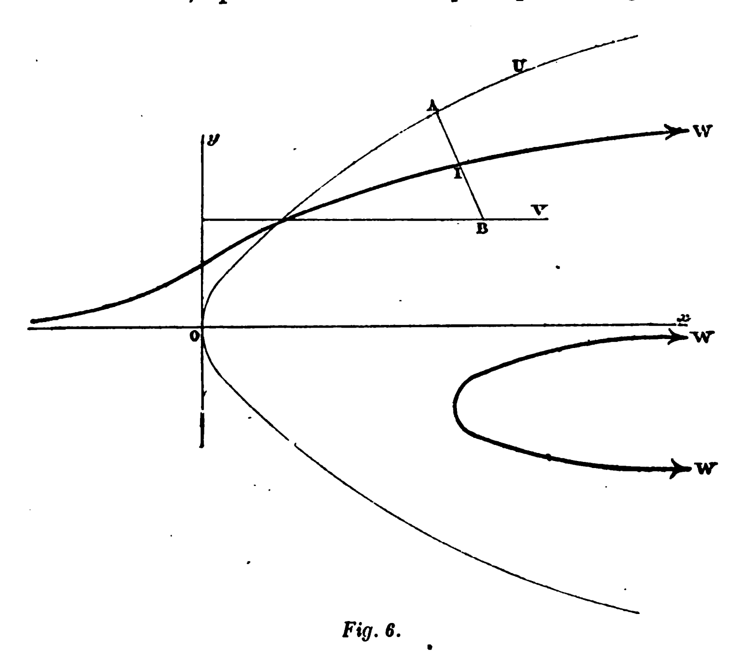


Fig. 6.

dessous est *le trident de Newton*. On peut donc construire cette courbe, point par point et tangente par tangente.

5. — Voici d'autres exemples de courbes qui se construisent très simplement, point par point, et tangente par tangente.

Soient prises d'abord trois courbes quelconques U_1, U_2, U_3; dans un même plan, bien entendu. Dans ce plan, parallèlement à une direction fixe, on leur mène une transversale $A_1A_2A_3$ sur laquelle on prend $A_3I = A_2A_1$; nous nous proposons de déterminer la tangente à la courbe, lieu du point I.

Considérons une transversale voisine $B_1B_2B_3$; des égalités :

$$\frac{tA_1}{tB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B^2}, \quad \frac{\theta A_3}{\theta B_3} = \frac{A_3I}{B_3I'},$$

on déduit

$$\frac{tA_1}{tB_1} = \frac{\theta A_3}{\theta B_3}.$$

La droite $t\theta$ étant, d'après cela, parallèle à la direction fixe donnée, on tire de cette remarque une construction très simple pour fixer la droite II', dans sa position limite.

Fig. 7.

6. — Soient U et V deux courbes quelconques; parallèlement à une direction fixe on leur mène une transversale AP et, sur cette droite, on prend un point A' tel que

$$AP \,.\, A'P = c^{te};$$

cherchons la tangente en A', au lieu W décrit par ce point.

L'égalité
$$AP \,.\, A'P = BQ \,.\, B'Q,$$
donne

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{B'Q}{A'P},$$

et, par suite,

$$\frac{tP}{tQ} = \frac{\theta Q}{\theta P}.$$

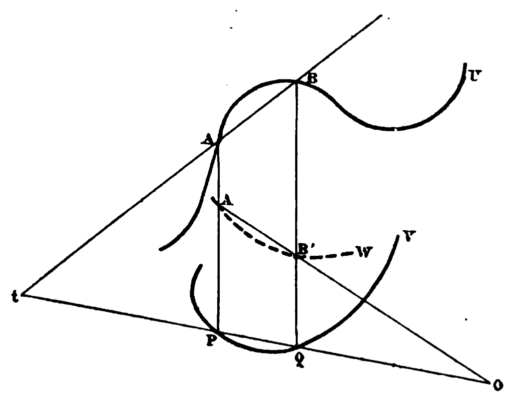


Fig. 8.

Les deux points t et θ sont donc symétriques par rapport au milieu de PQ. En passant à la limite, en supposant par conséquent que BQ se rapproche indéfiniment de AP, on déduit de cette position remarquable des points t, θ le tracé de la tangente à la courbe W, au point I. *(A suivre.)*

SUR LA CONSTRUCTION DE CHASLES

1. — On sait comment, deux diamètres conjugués d'une ellipse étant donnés de grandeur et de position, on détermine la grandeur et la situation des axes de la courbe par une construction que Chasles a fait connaître (*). Cette construction permet de trouver la somme et la différence des axes, d'où l'on conclut la grandeur même de ces axes.

M. Mannheim a, récemment (**), indiqué une modification

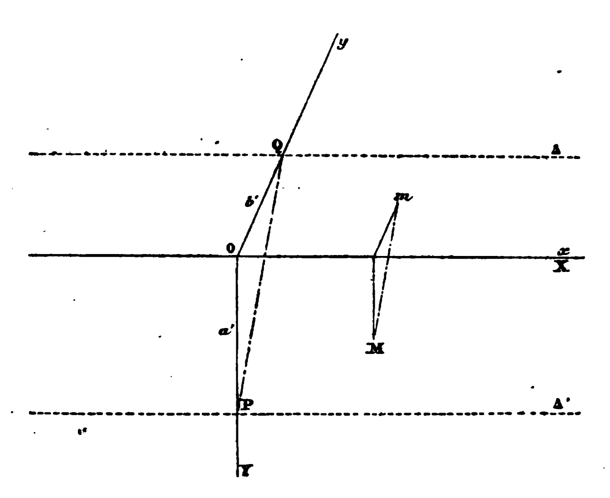


Fig. 1.

avantageuse à la construction de Chasles; en adoptant cette modification, on obtient *directement* les demi-axes de l'ellipse.

Il existe, dans le traité des sections coniques de L'Hospital (***), une façon de présenter la construction de Chasles

(*) Aperçu historique, p. 362.

(**) *Nouvelles Annales*, 1885, p. 150.

(***) *Traité analytique des sections coniques et de leur usage*, etc., par M. le marquis de l'Hospital. — Paris, MDCCXX.

qui met en évidence non seulement les demi-axes, mais les sommets mêmes de l'ellipse, et ceci ajoute encore quelque chose au perfectionnement proposé par M. Mannheim. Voici la construction indiquée par L'Hospital.

2. — Imaginons que dans deux systèmes d'axes *yox*, YOX, disposés comme l'indique la figure (le premier oblique, l'autre rectangulaire) deux points m et M se correspondent de telle façon : 1° que les parallèles menées par ces points aux axes respectifs *oy*, OY, se coupent sur l'axe commun *ox*X; 2° que la droite qui joint les points correspondants soit constamment parallèle à une droite PQ, donnée de position.

Dans cette transformation homographique les coordonnées (x, y), (X, Y) des deux points correspondants m, M vérifient les relations

$$x = X, \quad \frac{y}{b'} = \frac{Y}{a'}. \qquad \text{(A)}$$

Telles sont les formules de transformation; elles permettent de passer directement de l'équation de l'ellipse, rapportée à deux directions conjuguées, à celle d'un cercle.

3. — On vérifie sans peine les propriétés suivantes :

1° A une droite correspond une droite et ces deux droites correspondantes coupent l'axe *ox*X au même point; en particulier, les tangentes aux points correspondants concourent sur cet axe;

2° A l'ellipse Γ qui a pour centre le point Q et qui admet pour diamètres conjugués 1° $QO = b'$, 2° une parallèle à *ox*X menée par Q et d'une longueur égale à a', ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{2y}{b'} = 0,$$

correspond, d'après les formules (A), un cercle dont l'équation est

$$X^2 + Y^2 - 2a'Y = 0;$$

3° A deux diamètres conjugués de l'ellipse

$$y - b' = tx, \quad y - b' = t'x \quad \left(tt' = -\frac{b'^2}{a'^2}\right)$$

correspondent deux diamètres rectangulaires du cercle

$$Y - a' = t\frac{a'}{b'}X, \qquad Y - a' = t'\frac{a'}{b'}X.$$

Ces principes suffisent à la démonstration que nous avons en vue.

4. — Soient QA, QB les axes de Γ; PA′, PB′ les diamètres correspondants. Les droites PA′, QA d'une part, PB′, QB d'autre part, étant correspondantes, se coupent sur l'axe oxX. De plus l'angle A′PB′ est droit puis que les diamètres qui correspondent à deux diamètres conjugués sont rectangulaires.

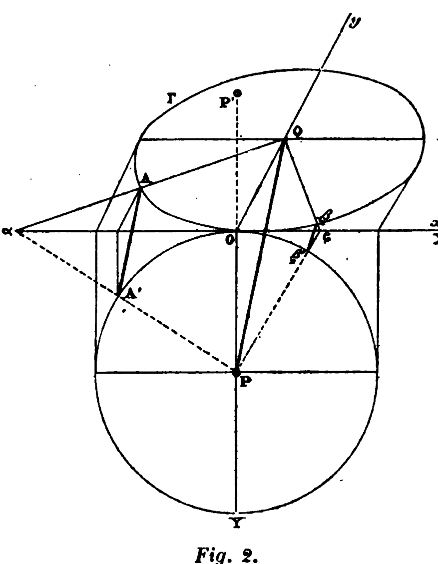


Fig. 2.

Ainsi, le quadrilatère PQαβ est inscriptible et le centre du cercle U en question est situé sur αβ. D'après cela, si nous prenons le point P′ symétrique de P par rapport à oxX, ce point P′ appartient à U. En faisant passer le cercle U par les trois points P, P′, Q, on obtiendra les points α, β et par suite la direction des axes Qα, Qβ; on retrouve bien la construction de Chasles.

Mais, et c'est ici que nous touchons au perfectionnement que nous voulions signaler, les sommets de la courbe, par exemple les points A et B, correspondant aux points A′ B′, se déduisent de ceux-ci en menant simplement, par A′ et par B′, des parallèles à la droite PQ. On obtient donc, par cette remarque les axes *dans leur situation même*.

Les propriétés diverses sur lesquelles est basée cette construction peuvent aussi s'établir, comme on en fera évidem-

ment la remarque, sans introduire l'idée de la transformation homographique, mais en considérant l'ellipse comme l'ombre portée sur un plan par un cercle donné.

G. L.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours du 16 juin 1885.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe on fait passer une circonférence variable.

1° A quelle condition doit satisfaire cette ellipse pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection;

2° En chacun des points d'intersection on mène les tangentes à l'ellipse; ces quatre droites forment un quadrilatère; lieu des sommets de ce quadrilatère, quand le cercle varie;

3° Quel est le lieu d'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse;

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Lieu de leurs points de contact avec le cercle.

1. — L'ellipse étant rapportée à ses axes, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Celle du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2yy' - c^2 = 0.$$

y' désignant l'ordonnée du centre.

L'élimination de x^2 entre ces deux équations donne

$$y^2 \frac{c^2}{b^2} + 2yy' - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Pour $y = 0$, on trouve le signe —. Les quatre points seront réels si, en substituant successivement $+ b$ et $- b$, on obtient deux résultats positifs. On doit donc avoir

$$c^2 - b^2 + 2by' > 0,$$
$$c^2 - b^2 - 2by' > 0.$$

Si l'on suppose $c < b$, quel que soit le signe de y' l'une de ces inégalités n'est pas vérifiée et deux points d'intersection seulement sont réels.

Les inégalités, en supposant $y' > 0$ pour fixer les idées, ne sont vérifiées que si l'on suppose simultanément

$$c, > b, \quad \text{et} \quad 0 < y' < \frac{c^2 - b^2}{2b}.$$

2. — Soient AA' et BB' les deux cordes qui correspondent à l'équation (1). Les tangentes aux points A et B se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique.

Désignons par α, β les coordonnées du point I; la conique aplatie formée par les droites AB, A'B' a pour équation:

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(-\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Le cercle AA'BB' pourra donc être représenté par

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(-\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) \qquad (2)$$

$$+ \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

En exprimant que cette équation représente un cercle, on a

$$\frac{\lambda c^2}{a^2 b^2} = \frac{\beta^2}{b^4} + \frac{\alpha^2}{a^4}; \qquad (3)$$

écrivons maintenant que l'équation (2) est vérifiée par $y = 0$, $x = \pm c$, et nous avons

$$\frac{\alpha^2 c^2}{a^4} - 1 = \lambda \frac{b^2}{a^2}. \qquad (4)$$

L'élimination de λ entre (3) et (4) donne

$$\beta^2 + \frac{\alpha^2}{a^2}(b^2 - c^2) + c^2 = 0. \qquad (A)$$

Comme nous supposons $b < c$, cette équation, dans laquelle α, β désignent des coordonnées courantes, représente une hyperbole rapportée à ses axes.

Autrement. — En cherchant les points d'intersection de la polaire de I avec la courbe on trouve immédiatement l'équation

$$\frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{a^2\beta^2}{b^2\alpha^2}\right) + \ldots + \frac{a^2}{\alpha^2} - 1 = 0. \qquad (5)$$

D'après (1) le produit des racines doit être égal à $-\frac{b^4}{c^2}$. On obtient ainsi l'équation (A).

3. — Soit B″ le symétrique de B′ par rapport au centre; la tangente en B″ rencontre la tangente en A en un point I′; soient α', β' ses coordonnées.

Si, dans l'équation (5) on change α en α', β en β' et si l'on écrit que le produit des racines est égal à $+\frac{b^4}{c^2}$, on a, après simplification,

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = c^2.$$

Ainsi, *le lieu décrit par le point* I′ *est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.*

Nous indiquons plus loin une démonstration géométrique de ce résultat.

4. — Soit Δ une tangente commune à l'ellipse et à la circonférence considérées (1); soit M_0 le point de contact.

En désignant par x_0, y_0 les coordonnées de M_0, l'équation de Δ est.

$$xx_0 + y(y_0 - y') - y_0y' - c^2 = 0.$$

Identifions-la avec l'équation générale des tangentes :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Nous avons

$$m = \frac{x_0}{y' - y_0},$$

$$\sqrt{a^2m^2 + b^2} = \frac{c^2 + y'y_0}{y_0 - y'}.$$

L'élimination de m donne d'abord

$$a^2x_0^2 + b^2(y' - y_0)^2 = (c^2 + y'y_0).^2$$

D'autre part,

$$y' = \frac{x_0^2 + y_0^2 - c^2}{2y_0}.$$

et finalement, le lieu cherché a pour équation (x_0, y_0 étant prises pour coordonnées courantes)

$$4a^2x^2 + \frac{b^2}{y^2}(x^2 - y^2 - c^2)^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2.$$

Cette équation peut s'écrire

$$4(b^2 + c^2)\, y^2x^2 + b^2(x^2 - y^2 - c^2)^2 = y^2\,(x^2 + y^2 + c^2)^2,$$

ou

$$b^2\{(x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2\} = y^2\,\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\},$$

ou encore

$$b^2\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\} = y^2\,\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\}.$$

Cette égalité peut encore s'écrire

$$(y^2 - b^2)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx) = 0.$$

Le lieu se compose donc

1° *Des tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe;*

2° *Des quatre droites isotropes passant par les deux foyers.*

On pouvait prévoir *à priori* l'existence de ces droites dans la recherche proposée, en imaginant le cercle imaginaire qui est constitué par une droite isotrope de l'un des foyers ($y - ix - ic = 0$) associée avec une des droites isotropes de l'autre foyer ($y + ix - ic = 0$) et en rappelant que les tangentes issues d'un foyer à l'ellipse sont les droites isotropes de ce point.

5. Démonstrations géométriques. — On peut d'ailleurs démontrer géométriquement les résultats précédents de la manière suivante.

1° Prenons d'abord le dernier. La tangente Δ rencontre ff' en un point R et l'on a

$$\overline{RM_0}^2 = Rf \,.\, Rf'.$$

Projetons M_0 sur ff' en P et pareillement les foyers f, f' sur Δ aux points H et H'. Les triangles semblables donnent :

$$\frac{fH}{M_0P} = \frac{Rf}{RM_0}, \quad \text{et} \quad \frac{f'H'}{M_0P} = \frac{Rf'}{RM_0}.$$

On a donc

$$\frac{fH \,.\, f'H'}{\overline{M_0P}^2} = \frac{Rf \,.\, Rf'}{\overline{RM_0}^2} = 1.$$

D'autre part, une propriété connue donne

$$fH \,.\, f'H' = b^2,$$

ainsi

$$M_0P = b.$$

2° Revenons maintenant au résultat du § (3). Le lieu pro-

posé revient à celui-ci : *sur une ellipse de foyers* f, f′ *on prend deux points*, A, B″ *tels que les angles* fAf′, fB″f′ *soient supplémentaires, trouver le lieu décrit par le point* I′ *pôle de* AB″.

En posant :

$$AfB'' = 2x, \quad fAf' = \alpha, \quad AI'f = B''I'f' = z,$$

puis en désignant par y l'angle formé par I′B″ avec le prolongement de AI′, des propriétés connues donnent :

$$\alpha + 2x - y = \frac{\pi}{2},$$

et

$$2z + \alpha + 2x = \pi.$$

D'où l'on tire

$$y + 2z = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'angle $fI'f'$ est droit; le lieu géométrique de I′ est donc le cercle décrit sur ff' comme diamètre.

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. A. **Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite* voir p. 134.)

§ II. — *Aires planes et courbes.*

Nous avons montré comment l'aire du carré se rattachait aux grandeurs de la première famille; nous avons vu également que, si l'on prend pour carré unité celui dont le côté est l'unité de longueur, l'aire du carré est mesurée par le carré du nombre qui mesure son côté.

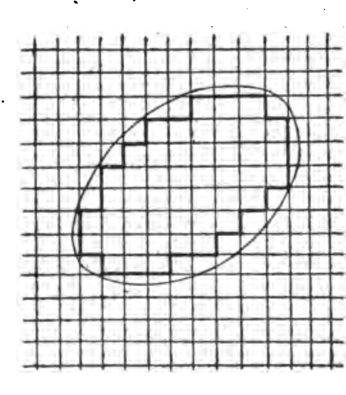
Théorème VIII. — *Le moment du carré est double de sa surface.*

Pour avoir le moment d'un contour fermé il suffit évidemment d'ajouter les moments de tous ses côtés par rapport à un point quelconque du plan.

Soit donc un carré de côté a, prenons les moments de ses côtés par rapport à l'un des sommets de ce carré; les deux côtés qui aboutissent à ce sommet ont des moments nuls et les deux autres côtés ont pour moment a^2, ce qui fait, comme somme, $2a^2$ ou le double de l'aire.

Théorème IX. — *Soit un contour fermé quelconque de moment* μ *: on trace sur ce contour un réseau de carrés égaux infiniment petits, la somme* s′ *des aires de tous les carrés compris dans le contour a une limite constante quelles que soient la loi de variation et l'orientation des carrés; cette limite est toujours égale à* $\frac{\mu}{2}$.

En effet, l'ensemble des carrés compris dans le contour est terminé à une ligne polygonale fermée dont le moment μ' est la somme des moments de tous ces carrés (th. IV) ou le double de la somme des aires de ces carrés (th. VIII); on a donc $\mu' = 2s'$, s' étant la somme de ces aires; d'autre part le contour polygonal étant infiniment voisin du contour curviligne, μ' a pour limite μ (th. VII); si donc s est la limite de s' on a $\mu = 2s$ ou $s = \frac{\mu}{2}$, ce qui démontre le théorème.



Cette limite s s'appelle, par définition, l'aire du contour. L'aire étant la moitié du moment, on en déduit le théorème suivant :

Théorème X. — *Lorsqu'un contour fermé total résulte du groupement de plusieurs contours fermés partiels, l'aire du contour total est la somme des aires des contours partiels* (th. IV).

Théorème XI. — *L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de sa base par sa hauteur.*

Si en effet on cherche le moment du contour par rapport à un sommet on trouve pour moment le produit du côté opposé à ce sommet par la hauteur correspondante : l'aire est donc la moitié de ce produit.

Les aires des autres figures planes se déduisent de celle du triangle par application du théorème X : nous ne nous étendrons donc pas davantage sur ce point.

On passe des aires planes aux aires courbes par la méthode connue exposée en géométrie infinitésimale ; nous rappellerons seulement le théorème qui sert de base à cette théorie :

Théorème XII. — *Une surface courbe fermée ou non étant donnée, on prend une surface polyédrale variable satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

1° Chaque face est un polygone infiniment petit qui a pour limite un point de la surface courbe ;

2° Cette face a pour direction limite la direction du plan tangent en ce point à la surface courbe.

L'aire polyédrique a une limite constante quelle que soit la loi de sa déformation.

C'est cette limite qu'on appelle par définition l'aire de la surface courbe.

Cette définition donnée, on en déduit très simplement l'aire du cylindre, du cône et de la sphère : comme surface polyédrique, il est souvent commode de partir d'un polyèdre circonscrit à la surface courbe. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMENS

20. — *Trouver directement la dérivée de arc tg x.*

On sait que l'on a :

$$\text{arc tg } a - \text{arc tg } b = \text{arc tg} \frac{a-b}{1+ab}.$$

(On suppose que l'expression *arc tg x* désigne une quan-

tité *bien déterminée*, dont la valeur est égale au plus petit arc positif dont la tangente ait une longueur égale à x).

D'après cela, l'égalité

$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(x+h) - \operatorname{arc\,tg} x}{h},$$

peut s'écrire

$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{h}{1 + x(x+h)}}{h},$$

ou encore,

$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{h}{1 + xh + x^2}}{\dfrac{h}{1 + xh + x^2}} \cdot \frac{1}{1 + xh + x^2}.$$

En passant à la limite, on obtient le résultat connu:

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Remarque. — On peut trouver, par un calcul analogue, les dérivées des autres fonctions circulaires inverses.

Soit proposé, par exemple, l'établissement direct de la dérivée de

$$y = \operatorname{arc\,sin} x.$$

On prendra pour point de départ l'identité :

$$\operatorname{arc\,sin} a - \operatorname{arc\,sin} b$$
$$= \operatorname{arc\,sin} (a\sqrt{1 - b^2} - b\sqrt{1 - a^2});$$

de laquelle on déduit,

$$\operatorname{arc\,sin}(x+h) - \operatorname{arc\,sin} x$$
$$= \operatorname{arc\,sin} \{(x+h)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2 - 2hx - h^2}\}.$$

On est ainsi ramené à trouver la vraie valeur, pour $h = 0$, de

$$\frac{(x+h)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2 - 2hx - h^2}}{h}.$$

Pour obtenir celle-ci, on multiplie, haut et bas, par

$$(x+h)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - x^2 - 2hx - h^2},$$

et l'on a finalement;

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

21. — *Trouver le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *de la fonction* y,

$$y = L\,\frac{1+x}{1-x}.$$

On peut d'abord observer que

$$y = L\,(1+x) - L\,(1+x).$$

On déduit de là

$$y' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2},$$

ou, en supposant $x^2 < 1$,

$$y' = 2(1 + x^2 + x^4 + \ldots).$$

On a donc, d'après cela,

$$y = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

22. — *Démontrer que pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$ *on ne peut pas avoir*

$$\sqrt{1+x} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

f et φ *désignant des fonctions entières.*

On peut observer que l'équation

$$(1+x)\,\varphi^2(x) - f^2(x) = 0$$

aurait alors une infinité de racines, ce qui est impossible, si l'on ne suppose pas que cette équation soit identique. Mais on ne peut avoir

$$(1+x)\ \varphi^2(x) = f^2(x),$$

parce que le premier membre est d'un degré impair, l'autre membre étant au contraire d'un degré pair.

CONCOURS GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(10 juin 1885.)

Composition en mathématiques.

Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes D de cette surface qui sont vues du centre sous un angle droit et l'on demande :

1° L'équation du cône lieu géométrique des cordes D qui passent par un

point donné S, ainsi que les positions du point S pour lesquelles ce cône est de révolution;

2° La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes D situées dans un plan donné P, ainsi que les positions du plan P pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.

QUESTIONS PROPOSÉES

169. — On considère une parabole P inscrite, aux points A et B, dans l'angle ACB ; si l'on désigne par M un point mobile sur P, on a constamment

$$\overline{MBA}^2 = 4MCB\ .\ MCA.$$

(G. L.)

170. — Soit BC un diamètre d'une ellipse E; on considère l'extrémité A d'un demi-diamètre conjugué de BC, puis on prend sur E (explicitement sur l'arc AC, pour éviter toute ambiguïté sur les signes) un point M; démontrer que l'on a constamment

$$\frac{1}{MAC} - \frac{1}{MAB} = \frac{2}{MBC}.$$

(G. L.)

171. — Soit BC un diamètre fixe dans une hyperbole donnée H; par les extrémités B et C on mène des parallèles aux asymptotes, parallèles qui se coupent en A.

Démontrer que si M est un point mobile sur H, le rapport

$$\frac{MAB.\ MAC}{MBC},$$

a une valeur constante. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15840-5.

NOTE SUR L'ÉQUATION EN λ

Par **E. Amigues.**

(*Suite* voir p. 145.)

II. — *Cas particuliers.*

Dans ce qui suit, j'aurai recours à des considérations géométriques, en vue de la simplicité.

Il est clair d'abord que si les coniques se coupent en quatre points distincts, l'équation en λ ne peut avoir de racines égales; et que dans le cas contraire elle en a nécessairement. Il nous reste à étudier ce cas-là.

1° Si les deux coniques ont un point de contact et un seul, il est réel; l'équation en λ a une racine double. La racine simple donne un couple de droites réelles; la racine double, un couple de droites distinctes, réelles ou imaginaires suivant que les deux autres points communs sont réels ou imaginaires.

2° Si les coniques sont bitangentes, les deux points de contact sont : ou réels, ou imaginaires conjugués; l'équation en λ a une racine double, la racine simple donne les tangentes aux deux points de contact, qui ne sont réelles qu'autant que ces points sont réels. La racine double donne deux cordes confondues avec la corde des contacts, c'est-à-dire une corde double réelle ; elle annule les mineurs du discriminant, ce qui n'a pas lieu dans le cas du contact simple.

3° Si les coniques ont trois points confondus, ces points sont réels ; l'équation en λ a une racine triple, qui donne deux cordes communes réelles et distinctes. La racine triple n'annule pas les mineurs du discriminant.

4° Si les coniques ont quatre points confondus, ces points sont réels. L'équation en λ a une racine triple, qui donne deux cordes réelles confondues avec la tangente en ces quatre points.

Comme on a examiné tous les cas et qu'ils ont conduit à des résultats différents, les réciproques sont vraies. Donc :

1° Si l'équation en λ a une racine double, les coniques sont tangentes ou bitangentes suivant que cette racine annule ou non les mineurs du discriminant.

2° Si l'équation en λ a une racine triple, les deux coniques ont un contact du second ou du troisième ordre, suivant que la racine triple annule ou non les mineurs du discriminant.

Pour une solution purement analytique, on pourra consulter une note de la Géométrie analytique de M. Pruvost, ou un Mémoire de M. Darboux sur les formes quadratiques *(Journal de mathématiques)*.

SUR LES

POINTS MULTIPLES DES COURBES PLANES

Par M. **Porchon**, professeur au Lycée de Versailles.

(*Suite*, voir p. 131.)

II. — *Cas des racines égales.*

Supposons maintenant que l'une des équations en λ ait des racines égales. Par exemple, admettons que dans l'équation (3), les premiers coefficients qui ne s'annulent pas soient A_p^2, A_{p+i}^1, A_{p+2i}; ils sont en ligne droite et l'équation qui donne λ, à la première approximation, est :

$$\frac{1}{2} A_p^2 \lambda^2 + A_{p+i}^1 \lambda + A_{p+2i} = 0. \qquad (9)$$

Supposons enfin que les racines de cette équation aient une valeur commune bx^i. Posons alors :

$$\lambda = bx^i + \mu, \qquad (10)$$

μ étant un infiniment petit de degré supérieur à i.

Comme l'équation (3) est de forme

$$\frac{1}{2} A_p^2 (\lambda - bx^i)^2 + F = 0,$$

F comprenant des termes infiniment petits tous d'un ordre

supérieur à $2i$, cette substitution lui fait prendre la forme

$$\frac{1}{2} A_p^2 \mu^2 + B\mu x_i + C x^{2i+1} + \ldots = 0. \qquad (11)$$

On la discute exactement comme l'équation en λ.

La ligne brisée régulière analogue à celle de l'équation en λ se compose de deux droites distinctes ou d'une seule droite. Dans le premier cas, on trouve deux valeurs de μ de forme

$$\mu = cx^{\theta_1} + \varepsilon_1, \qquad (12)$$

c désignant successivement deux nombres réels, θ_1 deux nombres entiers et positifs supérieurs à i, ε_1 deux infiniments petits d'ordre supérieur à θ_1. Il en résulte

$$y = ax + bx^i + cx^{\theta_1} + \varepsilon_1, \qquad (13)$$

et pour chacune de ces deux valeurs de y deux branches de courbe tangentes à la droite $y = ax$, avec ou sans inflexion suivant la parité de i, et sans rebroussement. Les deux branches sont situées du même côté de la tangente tant pour les valeurs positives que pour les valeurs négatives de x. Dans le deuxième cas, celui où la ligne brisée régulière se réduit à une droite, μ est donné à la première approximation, par une équation du deuxième degré. Supposons que cette équation ait ses racines distinctes. Elles sont de la forme (12), mais θ_1 n'a plus qu'une seule valeur, qui est ou entière ou de forme $\frac{2f+1}{2}$. Si elle est entière, même conclusion que dans le premier cas, pourvu que c soit réel; si elle est de forme $\frac{2f+1}{2}$, y prend la forme

$$y = ax + bx^i \pm \sqrt{c^2 x^{2f+1}} + \varepsilon_1.$$

Dans le cas où c^2 est réel, condition nécessaire pour que cette valeur de y réponde à des points réels, on ne peut donner à x que des valeurs de même signe que c^2, et il y a pour chaque valeur de c, deux branches de courbe formant un rebroussement de seconde espèce : car la différence entre l'ordonnée de la courbe et l'ordonnée de la tangente, savoir

$$bx^i \pm \sqrt{c^2 x^{2f+1}}$$

prend le signe de bx^i, puisque le terme suivant est infini-

ment petit d'un ordre supérieur; ce signe est donc indépendant de celui qu'on prend devant le radical.

Si les valeurs de c sont égales, on posera de même

$$\mu - cx^{\theta_1} = \nu,$$

et ainsi de suite. On finira par trouver une équation dont les racines soient distinctes, à moins que l'équation en y n'ait deux racines égales, c'est-à-dire ne soit décomposable en facteurs.

On discutera de la même manière le cas où l'une des équations en λ a une racine d'un ordre quelconque de multiplicité.

Nota. — En terminant cette note et en me reportant au précédent article je m'aperçois qu'une erreur de notation s'y est glissée. La formule de la p. 149 (l. 2, en remontant) doit s'écrire :

$$y = ax + bx^{\theta+1} + \varepsilon,$$

et, dans ce qui suit, il faut mettre $\theta+1$, à la même place de θ. Il en résulte que (p. 150, l. 8 en remontant) il faut dire : la parité du numérateur de $\theta+1$ et du dénominateur θ, etc... Quelques incorrections typographiques pouvant nuire à la clarté de la rédaction doivent aussi être relevées. 1° p. 147, l. 11 en remontant, au lieu de A^r, lisez A^r_{ij}, et, à la ligne suivante, au lieu de p^e, lisez r^e; 2° p. 148, l. 2 en remontant, au lieu de A^{1+3}_p lisez A^1_{p+3}; enfin dans l'équation 6, le dernier terme est $A^1_{p+3}\ \alpha^3\lambda$.

SUR LES COURBES SECTRICES

Par M. **Schoute**, professeur à l'Université de Groningue.

1. — Dans le plan d'un angle BAP et par le sommet A de cet angle on ne peut mener qu'une seule droite AQ, qui forme avec AB un angle BAQ égal à n fois l'angle BAP, si toutefois n représente un nombre entier et que l'on fasse attention au signe de l'angle. Au contraire, ce plan contient n droites différentes AP par A, qui forment avec AB des angles BAP, qui méritent tous d'être considérés comme la n^{me} partie de l'angle BAQ, si, sous l'idée de l'angle des deux droites AB et AQ, on entend l'angle ordinaire BAQ augmenté ou diminué de $2K\pi$. Ces n droites AP_k déterminent avec AB des angles BAP^k, dont l'expression $\dfrac{BAQ + 2k\pi}{n}$ représente les valeurs.

Elles constituent donc une « *étoile à* n *rayons* », si, par cette expression, on désigne la figure composée de n droites passant par un même point A, centre de l'étoile, de manière qu'elles divisent l'espace, autour du point A, en $2n$ angles égaux. J'appelle cette étoile *l'étoile sectrice d'ordre* n *de l'angle* BAQ.

Si le côté AB de l'angle BAQ est fixe et que l'autre côté AQ tourne autour du point A, l'étoile sectrice d'ordre n de l'angle BAQ tourne en même temps autour du point A. Et il est clair que les positions successives du côté mobile AQ et celles de l'étoile sectrice tournante se correspondent une à une, l'une à l'autre, si à une position quelconque de la droite AQ on associe cette position de l'étoile tournante qui forme l'étoile sectrice de l'angle BAQ correspondant. Donc, les différentes positions de l'étoile tournante constituent un faisceau de rayons d'ordre n, en involution. A la vérité, un point quelconque P du plan détermine une seule position de l'étoile, celle dans laquelle un des rayons de l'étoile passe par ce point P. Et cette involution est mise en rapport projectif avec le faisceau de rayons AQ, par l'accouplement de chaque rayon AQ à l'étoile sectrice de son angle BAQ.

Si la droite mobile AQ passe par un des points cycliques l'angle BAQ a une valeur infinie et purement imaginaire; de plus, les deux valeurs infinies et purement imaginaires des angles BAQ, qui correspondent aux deux points cycliques différents sont égales mais de signe contraire, de manière qu'il y a échange mutuel de ces deux valeurs aussitôt que l'on change le sens de rotation, dans lequel on compte positivement l'angle BAQ. Cela prouve que l'étoile sectrice d'un angle BAQ, dont le côté mobile passe par un point cyclique n'est composée que d'un seul rayon passant par ce point et que, dans cette étoile, ce rayon compte n fois. On trouve donc que l'involution de l'étoile tournante contient deux groupes particuliers, chacun d'eux se composant de n droites coïncidantes avec les deux droites, qui joignent A aux points cycliques (*).

(*) Pour le cas $n = 3$, l'involution de l'étoile tournante se trouve incidemment chez Dr Émile Weyr dans son étude : « *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen* » (Prag, 1874).

Pour simplifier le langage, je représenterai l'involution d'ordre n et à centre A, dont il était question tout à l'heure, par le symbole J^n_A.

2. — Si l'on a mis en rapport projectif deux involutions données J^n_A et $J^{n'}_{A'}$, on a établi en même temps un rapport projectif entre les faisceaux de rayons correspondants AQ et A'Q', qui font avec les droites AB et A'B', choisies arbitrairement, des angles BAQ et B'A'Q' dont les éléments correspondants des involutions forment les étoiles sectrices d'ordre n et n'. Et, réciproquement, la manière la plus simple pour établir un rapport projectif entre deux involutions données J^n_A et $J^{n'}_{A'}$, c'est de mettre en rapport projectif les deux faisceaux correspondants des droites AQ et A'Q', par rapport à deux axes AB et A'B' choisis à volonté. Je suppose dans les pages suivantes, que les nombres entiers n et n', qui représentent les ordres des involutions données, sont premiers entre eux, que n est plus grand que n' et qu'on a mis en rapport projectif les deux involutions données J^n_A et $J^{n'}_{A'}$ en faisant correspondre l'un à l'autre les rayons AQ et A'Q', qui forment avec les droites AB et A'B', menées arbitrairement par A et A', des angles égaux, ou égaux mais en sens contraire. Car c'est de ces cas particuliers que découlent les résultats généraux, que je désire faire connaître.

Suivant les recherches connues de M. Cremona, le lieu des points d'intersection des éléments correspondants des involutions projectives J^n_A et $J^{n'}_{A'}$ est une courbe $C^{n+n'}$ de l'ordre $n + n'$, qui passe n fois par A et n' fois par A' En A, cette courbe est touchée par les n rayons de l'étoile contenue en J^n_A qui correspond à cette étoile de $J^{n'}_{A'}$ dont un des rayons passe par A. De même, les tangentes à la courbe en A' forment l'étoile de $J^{n'}_{A'}$ qui correspond à l'étoile de J^n_A, dont un des rayons passe par A'.

Mais, tandis que ces résultats ne varient pas, quand on passe du cas des angles BAQ et B'A'Q' égaux et de même signe au cas des angles BAQ et B'A'Q' égaux et de signe contraire, la signification des points cycliques pour la courbe

$C^{n+n'}$ est tout à fait différente dans les deux cas mentionnés. Si, comme dans ce premier cas, les étoiles tournantes se correspondent en tournant dans le même sens, les éléments qui passent par le même point cyclique sont des éléments correspondants, de manière que la courbe $C^{n+n'}$ passe n' fois par chacun des points cycliques et que les n' tangentes de la courbe en un point cyclique coïncident avec la droite qui joint ce point au point A′ et coupent chacune la courbe en ce point cyclique en n points coïncidants. Et si, comme dans le second cas, les étoiles tournantes se correspondent en tournant en sens contraire, l'élément de J^n_A qui passe par un des points cycliques correspond à l'élément de $J^{n'}_{A'}$ qui passe par l'autre point cyclique, de manière que dans ce cas la courbe ne passe pas par les points cycliques.

On trouve l'ordre de multiplicité des points cycliques sur les courbes en question d'une autre manière par la recherche des points réels de la courbe résultante situés à distance infinie. Dans le cas des angles BAQ et B′A′Q′ égaux et de même sens, les points P à distance infinie de la courbe $C^{n+n'}$ sont déterminés par la condition $n\varphi = n'(\varphi + \alpha)$, où φ représente l'angle BAP et $\varphi + \alpha$ l'angle B′A′P′. Car des deux expressions $n\varphi$ et $n'(\varphi + \alpha)$ la première est égale à l'angle BAQ et la seconde à l'angle B′A′Q′. Donc le nombre des points infinis réels P de $C^{n+n'}$ est égal au nombre $n - n'$ des solutions différentes de la congruence $(n - n')\,\varphi \equiv n'\alpha$ (mod. π) et la courbe doit posséder un nombre de $n + n' - (n - n') = 2n'$ points infinis imaginaires. Dans le cas où les anelsg BAQ et B′A′Q′ sont égaux et de sens contraire les points infinis réels P sont en nombre $n + n'$, nombre des solutions de la congruence $(n + n')\varphi + n'\alpha \equiv 0$ (mod. π) la courbe n'admet pas des points infinis imaginaires.

La considération précédente fait connaître en même temps la distribution des points infinis réels. Car la série des solutions de la première congruence montre que les droites qui joignent un point quelconque du plan aux $n - n'$ points infinis réels de la première courbe $C^{n+n'}$ forment une étoile à $n - n'$ rayons. Et, de la même manière, on démontre que les droites menées par un point, parallèlement aux

$n + n'$ asymptotes de la seconde courbe $C^{n+n'}$, forment une étoile à $n + n'$ rayons.

La courbe engendrée peut abaisser son ordre d'une unité. C'est ce qui arrive quand la droite AA', qui joint les centres des involutions correspond à elle-même, c'est-à-dire quand, selon une expression due à M. Schröter, les deux involutions projectives se trouvent en position partiellement perspective. Et quand la droite AA' se détache de la courbe $C^{n+n'}$, la courbe restante $C^{n+n'-1}$ ne passera que $n - 1$ fois par A et $n' - 1$ fois par A' et en même temps les étoiles des tangentes en A et en A' et l'étoile des droites menées par un point quelconque de AA', parallèlement aux asymptotes de la courbe, perdent leur rayon qui coïncide avec AA'.

(A suivre.)

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 153.)

La trisectrice de Mac-Laurin.

7. — Prenons une courbe U et deux points fixes O, O'; puis effectuons la construction suivante.

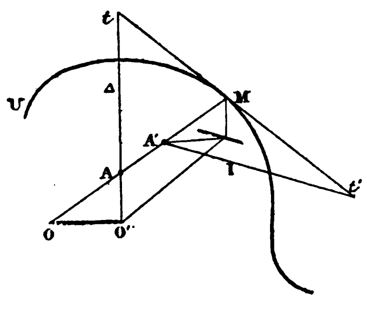


Fig.9.

Par O menons une droite rencontrant U en M, du point M abaissons une perpendiculaire sur OO'; enfin, par O' traçons une parallèle a MO. Nous obtenons ainsi un point I qui décrit une certaine courbe V, quand M parcourt la courbe donnée U. Nous nous proposons d'indiquer le tracé de la tangente à V, au point I.

Élevons au point O′ une droite Δ perpendiculaire à OO′; Δ rencontre OM en un certain point A; menons aussi IA′ parallèlement à OO′. Nous avons OA = MA′ et en considérant deux rayons vecteurs infiniment voisins, le théorème des *transversales réciproques*, appliqué à cette figure, prouve que la tangente en A′, au lieu W décrit par A′ et la droite Δ rencontrent la tangente *tt′* au point M en deux points *t*, *t′* symétriques par rapport à ce point.

D'ailleurs, la courbe W, lieu décrit par A′, n'est autre chose que V transportée parallèlement à elle-même dans la direction OO′, à une distance égale à OO′. D'après cette remarque, si l'on prend M*t′* = M*t*, la tangente demandée est parallèle à A′*t′*.

8. — Appliquons cette construction à la trisectrice. On appelle *trisectrice* (*) une courbe qui sert à résoudre le problème de la trisection de l'angle. Il y a naturellement beaucoup de trisectrices; en voici une dont la génération est très simple (**).

Imaginons sur une droite des points équidistants :

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_5 = a;$$

menons par O_1 une transversale arbitraire O_1M, puis abaissons O_5M perpendiculairement à cette droite; soit O_2I parallèle à O_1M et soit MI perpendiculaire à O_1O_5. Le lieu de I est une courbe V_1 qui rentre, comme cas très particulier, dans les courbes que nous avons engendrées point par point, au moyen de la construction indiquée dans le paragraphe précédent. Le tracé de la tangente à V_1 se fera donc comme

(*) Ce nom a été proposé par M. Godefroy; voyez : *Archives Néerlandaises*, t. XX, 1885 (sur la construction de courbes unicursales, par points et tangentes, par P. H. Schoute, professeur à l'Université de Groningue).

L'article de M. Schoute dont la publication est commencée ci-dessus, renferme diverses considérations sur la trisectrice, que l'on trouvera dans le prochain numéro.

(**) Cette courbe, d'après une communication que je dois à l'obligeance de M. Schoute, se trouve dans *le Traité des fluxions de Mac-Laurin* (1749, pl. X, fig. 134, p. 198).

Elle a été retrouvée récemment, par une génération très différente, par M. João d'Almeida Lima, primeiro tenente de artilheria; *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* publié par le Dr F. Gomes Teixeira (Coimbra).

nous l'avons dit et bien simplement puisque la droite tt', considérée dans le cas général, n'est autre chose dans la *fig. 10* que la perpendiculaire élevée au point M à O_3M.

9. — Mais il nous reste à montrer pourquoi la courbe V_1 est une trisectrice.

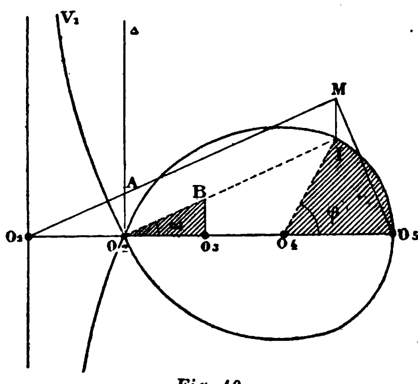


Fig. 10.

Nous avons

$$O_2I = AM = O_1M - O_1A$$

$$= 4a \cos \omega - \frac{a}{\cos \omega}$$

et

$$\frac{O_2I}{\text{in } \varphi} = \frac{2a}{\sin(\varphi - \omega)}.$$

Les angles φ et ω vérifient donc, pour tous les points de V_1, la relation :

$$2 \sin \varphi \cos \omega = (4 \cos^2 \omega - 1) \sin(\varphi - \omega).$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\sin \varphi \cos \omega (3 - 4 \cos^2 \omega) = \sin \omega \cos \varphi (1 - 4 \cos^2 \omega),$$

ou encore

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \sin^3 \omega - 3 \sin \omega}{3 \cos \omega - 4 \cos^3 \omega},$$

ou enfin

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 3\omega.$$

Ainsi l'angle IO_2O_5 est le tiers de l'angle IO_4O_5; V_1 est donc bien une trisectrice.

10. — L'équation cartésienne de la courbe V_1 est

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2),$$

elle rentre dans la famille des cubiques circulaires unicursales et, comme je l'ai montré ailleurs (*), ces courbes peuvent

---

(*) *Congrès de Grenoble*, 1885. Je reviendrai d'ailleurs sur ce point dans ma *Géométrie de la règle et de l'équerre (Journal de mathématiques élémentaires)* et je donnerai, à ce propos, une construction plus simple que celle que j'ai indiquée tout à l'heure, pour mener une tangente à la trisectrice. Je laisse au lecteur le soin de vérifier la propriété suivante :

On donne un cercle C, *un diamètre* AB *et une droite* Δ *perpendiculaire sur* AB, *en un point* D *intérieur, tel que* BD = 3DA; *si par* A *on mène une*

être considérées comme des conchoïdales de cercle, courbes qui se prêtent très aisément au tracé des tangentes.

11. — Je ne quitterai pas cette courbe remarquable sans faire connaître une très curieuse propriété qui a été signalée par M. Godefroy; cette propriété peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Dans la trisectrice le secteur curviligne* IO_4O_8 *est égal au triple du triangle* O_2BO_8.

Comme on a

$$\varphi = 3\omega,$$

et, par conséquent,

$$d\varphi = 3d\omega,$$

tout revient à démontrer que

$$O_4I = O_2B.$$

Or, on a

$$\frac{O_4I}{\sin\omega} = \frac{O_2I}{\sin 3\omega} = \frac{a(4\cos^2\omega - 1)}{\cos\omega\,\sin 3\omega};$$

on en déduit

$$O_4I = a\,\frac{4\cos^2\omega - 1}{\cos\omega(3 - 4\sin^2\omega)} = \frac{a}{\cos\omega}.$$

D'ailleurs, le triangle O_2O_8B donne

$$O_2B = \frac{a}{\cos\omega};$$

on a donc bien

$$O_4I = O_2B,$$

égalité qui entraîne le théorème de M. Godefroy.

(A suivre.)

---

transversale mobile rencontrant C *en* M, Δ *en* N *et si l'on prend* AI = NM, *le lieu de* I *est la trisectrice de Mac-Laurin.*

Ainsi la trisectrice s'engendre point par point comme la cissoïde et la strophoïde ; pour la cissoïde Δ est en B, pour la strophoïde Δ passe par le milieu de AB ; enfin, pour la trisectrice, Δ doit passer par le point qui partage AB dans le rapport de 1 à 3.

La tangente à la trisectrice se construit donc par le procédé des transversales réciproques de la même façon que pour la cissoïde et la strophoïde.

Menez la tangente à C *au point* M *jusqu'à sa rencontre en* μ *avec* Δ, *prenez* $M\mu' = \mu M$; $\mu'I$ *est la tangente à la trisectrice.*

ÉCOLE NORMALE

CONCOURS DE 1885

Solution de la 1re question proposée aux candidats (*).

Soit F′ le second foyer ; abaissons de F et F′ des perpendiculaires FH, F′H′ sur la tangente P_1P_2 ; les pieds H et H′ de ces perpendiculaires sont sur le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre. Joignons FP_1 et HF′, on a :

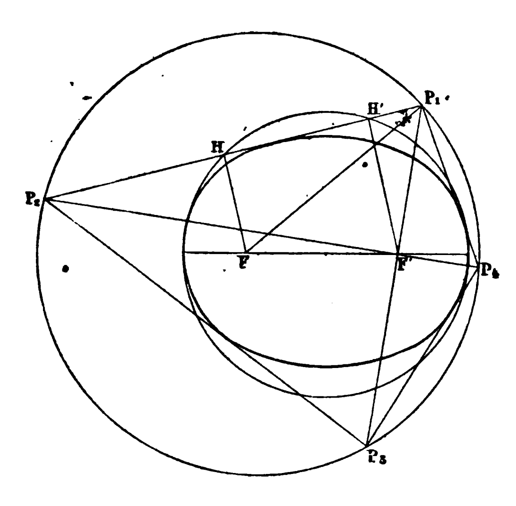
$$\overline{HP_1}^2 = \overline{FP_1}^2 - \overline{FH}^2 = 2a^2 + 2c^2 - \overline{FH}^2,$$

ensuite :

$$\overline{HF'}^2 = \overline{HH'}^2 + \overline{F'H'}^2.$$

Mais dans le trapèze rectangle HH′FF′ on a :

$$\overline{HH'}^2 = \overline{FF'}^2 - (F'H' - FH)^2 = 4c^2 - \overline{FH}^2 - \overline{F'H'}^2 + 2FH \,.\, F'H'.$$



Donc, en remarquant que $FH \,.\, F'H' = b^2$,

$$\overline{HF'}^2 = 4c^2 + 2b^2 - FH^2 = 2a^2 + 2c^2 - \overline{FH}^2,$$

par conséquent $HF' = HP_1$. Il en résulte immédiatement que l'angle $P_2F'P_1$ est droit, car H est le milieu de P_1P_2; donc, les angles $P_2F'P_3$, $P_3F'P_4$ étant également droits, les droites P_1P_3, P_2P_4 sont rectangulaires et se coupent au foyer F′. Enfin, si de P_4 on mène une quatrième

(*) Voyez plus loin l'énoncé de cette question.

tangente à l'ellipse, elle rencontrera le cercle en un point situé sur la perpendiculaire à P_1F' menée par F', donc en P_1.

REMARQUES. — 1° Il est facile, étant donnée une ellipse, de tracer un cercle remplissant les conditions de l'énoncé. Il suffit, en effet, de mener deux parallèles telles que FH et F'H', de joindre HH' et de prendre $HP_1 = HF'$; le rayon du cercle sera précisément égal à FP_1.

2° On sait par les travaux de Poncelet sur les polygones circonscrits et inscrits à deux coniques, qu'il suffit de vérifier le théorème proposé, pour une position particulière de P_1. On obtient une vérification très simple en considérant les tangentes à l'ellipse aux sommets du grand axe et rencontrant le cercle en des points que nous appellerons C, C' et D, D'. On voit facilement que les droites CD et C'D', symétriques par rapport au grand axe, sont tangentes à l'ellipse.

B. N.

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. A. **Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite* voir p. 163.)

§ III. — *Aires projetées.*

Il est souvent utile d'attribuer un signe aux aires planes : un contour pouvant être décrit dans deux sens différents, le moment de ce contour est susceptible de deux signes : nous adopterons pour l'aire qui est la moitié du moment le signe du moment.

On sait que, dans ces conditions, les aires planes se représentent par des perpendiculaires à leur plan : ces perpenculaires commencent au point où elles rencontrent le plan en question et ont ainsi un sens bien déterminé qui représente le sens de l'aire : des perpendiculaires situées d'un

même côté du plan représentent de cette façon des aires de même signe. L'angle de deux aires planes est l'angle unique que forment les deux perpendiculaires, ces deux perpendiculaires de sens déterminé ne formant en effet qu'un angle.

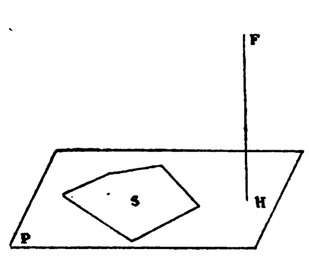
On déduit de là que la projection d'une aire plane sur un plan P est représentée par la projection sur la normale OZ à P de la perpendiculaire qui représente cette aire.

Enfin si l'on considère un polyèdre et qu'on suppose les aires de toutes ses faces comme représentées par des normales toutes intérieures au polyèdre, ce qui détermine le sens de ces aires, on a le théorème suivant analogue au théorème des projections en géométrie plane.

Théorème XII. — *Deux surfaces polyédrales limitées à un même contour ont même projection sur un plan quelconque Une surface polyédrale fermée a une projection nulle sur un plan quelconque.*

§ IV. — *Moment des surfaces polyédrales et courbes.*

Soit une aire S située dans le plan P, nous appellerons moment de S par rapport au point F le produit $S \times FH$, FH étant la perpendiculaire abaissée du point F sur le plan P. L'aire S est, bien entendu, définie en signe : le moment $S \times FH$ est nul, soit quand S est nul, soit quand le plan P contient le point F.



Le moment d'une aire polyédrale est la somme algébrique des moments de ses diverses faces.

Ces définitions posées, la théorie des moments dans l'espace et des volumes s'établit de la même façon que la théorie correspondante en géométrie plane ; les théorèmes et leur démonstration sont presque identiques.

Théorème XIII. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de l'aire lane* S *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* s *la projection de*

S *sur le plan normal à* FF_1 *on a*

$$\mu_1 - \mu = FF_1 \times s.$$

Théorème XIV. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de l'aire polyédrale* S *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* s *cette aire projetée sur le plan normal à* FF_1 *on a*

$$\mu_1 - \mu = FF_1 \times s.$$

Théorème XV. — *Le moment d'une aire polyédrale fermée est constant pour un point quelconque de l'espace.*

Ce moment constant est le moment de la surface fermée.

Théorème XVI. — *Si une surface fermée résulte du groupement de plusieurs surfaces fermées partielles, le moment de la surface totale est la somme des moments des surfaces partielles.*

Théorème XVII. — *Soient* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *deux sections triangulaires d'un trièdre* F *et* μ *et* μ_1 *les moments de ces deux sections par rapport au sommet* F, *on a*

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{FA \,.\, FB \,.\, FC}{FA_1 \,.\, FB_1 \,.\, FC_1}.$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle donnée en géométrie plane.

Théorème XVIII. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de deux surfaces polyédrales* S *et* S_1, *terminées à un même contour, par rapport à un point* F; *si la surface* S_1 *est intérieure à la surface* S *par rapport au point* F *on a* $\mu > \mu_1$.

Il suffit pour cette démonstration de décomposer les deux surfaces en triangles correspondants par des angles trièdres ayant leur sommet en F et d'appliquer le théorème précédent à ces triangles.

Théorème XIX. — *Soient une portion de surface courbe* S *et une surface polyédrale* S_1, *à faces infiniment petites, et infiniment voisine de la surface* S, *c'est-à-dire telle que chaque face en tendant vers zéro a pour limite un point de* S: *le moment*

de S_1 *par rapport à un point* F *a une limite constante quelle que soit la loi de déformation de la surface* S_1.

Cette limite constante est, par définition, le moment de la surface S par rapport au point F.

Cette définition permet d'étendre aux surfaces courbes les théorèmes relatifs aux moments des aires polyédrales.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

23. — *Trouver la condition que doivent vérifier les coefficients de l'équation d'une conique pour que les tangentes issues de l'origine forment, avec les axes de coordonnées, un faisceau harmonique.*

L'équation de la conique étant

$$f = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

le faisceau des tangentes issues de l'origine est représenté par l'égalité

$$A''f - (By + B'x + A'')^2 = 0.$$

Cette relation s'écrit encore :

$$(AA'' - B'^2)x^2 + 2(A''B'' - BB')xy + (A'A'' - B^2)y^2 = 0.$$

A une valeur de x doivent correspondre deux valeurs de y, égales et de signes contraires ; on a donc

$$A''B'' - BB' = 0.$$

24. — *Un plan* P *coupe le trièdre des axes de coordonnées en des points* A, B, C; *on suppose* OA = a, OB = b, OC = c, *trouver les coordonnées de l'orthocentre du triangle* ABC. *(Les axes étant rectangulaires.)*

On trouve facilement

$$ax = by = cz = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

25. — *Soit* P *un point arbitrairement choisi sur un ellipsoïde; la normale en* P *rencontre les plans principaux en des points* A, B, C.

Démontrer que le rapport anharmonique des points (P, A, B, C) *est constant, quel que soit* P.

On projette les points P, A, B, C, par des plans parallèles à *yoz* sur l'axe *ox*. On voit ainsi que le rapport $\frac{PA}{PC}$ est constant. Cette remarque pouvant s'appliquer au point P associé à deux quelconques des points A, B, C on a

$$\frac{PA}{PC} : \frac{BA}{BC} = \text{constante}.$$

26. — *Résoudre, en nombres entiers, l'équation*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

L'identité (*) :

$$(\gamma\alpha^2 - \beta^2\gamma)^2 + (2\alpha\beta\gamma)^2 = (\gamma\alpha^2 + \beta^2\gamma)^2$$

donne une infinité de solutions entières de l'équation proposée ; il faut seulement donner à α, β, γ des valeurs entières arbitraires et poser :

$$x = \gamma(\alpha^2 - \beta^2),$$
$$y = 2\alpha\beta\gamma,$$
$$z = \gamma(\alpha^2 + \beta^2).$$

Pour obtenir des triangles rectangles dont les côtés soient des nombres entiers et *qui ne soient pas semblables*, il faut supposer $\gamma = 1$, dans ces formules.

Les solutions les plus simples sont

3	4	5	8	15	17
5	12	13	12	35	37
7	24	25	16	63	65
9	40	41	20	99	101
. . .			. . .		

Pour des nombres inférieurs à 500, le résultat le plus voisin de ce nombre est fourni par

$$x = 319, \quad y = 360, \quad z = 481 \text{ (**)}.$$

27. — *On considère l'identité connue*

(*) Voyez de Longchamps, *Algèbre*, p. 241.

(**) *The Mathematical Magazine* (avril 1884, p. 163 ; *Rational righttriangles*, par Fitz Newton).

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{mx+n}{x_2+1} + \frac{A}{x+1}, \qquad (1)$$

on connaît A, *on propose de calculer* m.

On peut dire que l'identité (1) entraîne la suivante

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{mx^2+nx}{x^2+1} + \frac{Ax}{x+1}.$$

Quand x croît au delà de toute limite on a

$$1 = m + A.$$

28. — *On connaît le developpement de la fraction rationnelle* f

$$f = \frac{1}{x(x^2+1)},$$

en déduire celui de φ,

$$\varphi = \frac{1}{x^3(x^2+1)}.$$

On observera que l'on a

$$\varphi = \frac{x^2+1-x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

(A suivre.)

AGRÉGATION 1885

Mathématiques spéciales.

— 1° On donne une sphère S, et, sur cette sphère, un cercle C et un point T; démontrer qu'il y a deux paraboloïdes passant par le cercle C et tangents à la sphère au point T.

— 2° Démontrer que les axes de ces paraboloïdes sont dans un même plan, et trouver le lieu de leur point d'intersection quand le point T se meut sur la sphère.

— 3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes.

— 4° Soient T et T′ deux points diamétralement opposés sur la sphère. Au point T correspondent deux paraboloïdes P et Q, au point T′ correspondent deux autres paraboloïdes P′ et Q′. — Trouver le lieu engendré par la courbe d'intersection de chacun des paraboloïdes P et Q avec chacun des paraboloïdes P′ et Q′ quand on fait varier la direction du diamètre TT′.

ÉCOLE CENTRALE 1885

PREMIÈRE SESSION

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires OX, OY et le cercle représenté par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

On considère la corde fixe AB menée par l'origine et partagée par ce point en deux parties égales, et une corde mobile CD, de direction constante, dont le coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de la corde fixe AB.

On sait que par les quatre points A, B, C, D on peut faire passer deux paraboles P, P'.

Trouver, quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même :

1° Le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles P et P';

2° Le lieu du sommet et le lieu du foyer de chacune des paraboles.

Triangle.

On donne deux côtés a, b d'un triangle et l'angle C qu'ils comprennent, savoir :

$$a = 63741^{m},35$$
$$b = 44623^{m},77$$
$$C = 117^{\circ}\ 35'\ 43'',2.$$

On demande de déterminer les angles A, B, le côté c, ainsi que la surface du triangle.

Épure.

Un cylindre de révolution dont le diamètre $d = 0^{m},080$ touche les deux plans de projection. Un cône, aussi de révolution, a pour trace horizontale un cercle tangent à la ligne de terre, dont le diamètre est égal à $2d$, la cote du sommet $= \frac{1}{2} d$.

Construire :

1° Les deux projections et le *développement* de la partie Σ de la *surface* du cylindre comprise dans les deux nappes du cône.

2° La projection horizontale et la transformée par développement, de l'intersection de la surface Σ avec un plan perpendiculaire au plan vertical, incliné de 45° sur le plan horizontal, et passant par le sommet du cône.

On indiquera à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et du développement des lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur. — *Géométrie descriptive.*

Titre intérieur. — *Intersection d'un cône et d'un cylindre.* Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre à $0^{m},170$ du grand côté inférieur, et les projections du sommet du cône à $0^{m},130$ de la parallèle aux petits côtés du cadre, qui passe au milieu de la feuille.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCES

(1er juillet 1885).

I. — Discuter la courbe représentée par l'équation :

$$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0,$$

II. — Reconnaître la nature des différentes surfaces représentées par l'équation du deuxième degré :

$$x^2 + y^2 + hz^2 + 2axz + 2byz + 2cz = 0.$$

quand les coefficients h, a, b, c prennent toutes les valeurs possibles ; déterminer les sections circulaires de ces surfaces.

ÉCOLE NORMALE (CONCOURS DE 1885).

Composition en Mathématiques.

Soit une ellipse E dont le grand axe et la distance focale sont respectivement égaux à $2a$ et $2c$. Du foyer F de cette ellipse comme centre, on décrit une circonférence C dont le rayon est égal à $\sqrt{2(a^2 + c^2)}$. D'un point quelconque P_1 de la circonférence C on mène une tangente P_1P_2 a l'ellipse, P_2 désignant le second point de rencontre de cette droite avec la circonférence. On mène de même la tangente P_2P_3 à l'ellipse, puis la tangente P_3P_4.

On demande de démontrer que la seconde tangente menée à l'ellipse par le point P_4 passe par le point initial P_1.

1° On considère la fonction de x,

$$y = \frac{\sin[m(\text{arc} \cos x)]}{\sqrt{1 - x^2}}$$

où m est une constante donnée. Montrer que cette fonction satisfait à la relation

$$(x^2 - 1)y'' + 3xy' - (m^2 - 1)y \equiv 0,$$

y' et y'' désignant les dérivées premières et secondes de la fonction y.

2° En supposant que m soit un entier positif, on demande d'établir que l'on peut satisfaire à l'identité précédente en prenant pour y un polynme en x.

Après avoir trouvé le degré de ce polynôme on cherchera la forme de ses coefficients.

QUESTION 102

Solution par M. L. MARCHIS, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée de Rouen.

On donne une ellipse E *et l'on considère la droite* Δ *qui a pour équation,*

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Soit M *un point pris sur l'ellipse, et soit* Δ′ *la tangente en ce point;* Δ′ *rencontre* Δ *en un point* P. *On joint ce point* P *au sommet de droite* A, *et on élève à* AP *une perpendiculaire* Δ″ *par le point* A. *Démontrer que la droite* AM *est bissectrice de l'angle formé par* Δ″ *avec le grand axe* AA′. *Déduire de cette remarque une construction de la tangente en un point de l'ellipse au moyen de la règle et de l'équerre. On suppose que les sommets de la courbe sont seuls connus.*

Rapportons l'ellipse E à ses axes et soient x', y' les coordonnées du point M. On a :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'équation de Δ′ est :

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0.$$

Cherchons les coordonnées de P. Dans l'équation de Δ′, remplaçons $\frac{x}{a}$ par $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$, nous avons

$$\frac{x'}{a} \cdot \frac{a^2 + b^2}{c^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1;$$

$$\text{P}\begin{cases} y = \dfrac{ab^2c^2 - b^2x'(a^2 + b^2)}{ac^2y'}, \\ x = a \cdot \dfrac{a^2 + b^2}{c^2}. \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de PA est :

$$\frac{ab^2c^2 - b^2x'(a^2 + b^2)}{a^2y''\left[a\,\dfrac{a^2 + b^2}{c^2} - a\right]}.$$

Donc le coefficient angulaire de Δ″ est :

$$\text{tang}\ \alpha' = \frac{-2a^2y'}{ac^2 - x'(a^2 + b^2)}$$

α′ désignant l'angle que fait Ox avec Δ″.

Appelons α l'angle que fait Ox avec AM,

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{y'}{x' - a}.$$

Calculons tang 2α.

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2y'(x'-a)}{(x'-a)^2 - y'^2} = \frac{\frac{2y'}{b^2}(x'-a)}{\frac{(x'-a)^2}{b^2} - \frac{y'^2}{b^2}},$$

ou, en remplaçant $\frac{y'^2}{b^2}$ par sa valeur tirée de la relation 1,

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2a^2y'}{a^2(x'-a) + b^2(x'+a)} = \frac{2a^2y'}{x'(a^2+b^2) - ac^2}$$

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{-2a^2y'}{ac^2 - x'(a^2+b^2)},$$

Donc $2\alpha = \alpha'$,

ou $\alpha = \frac{\alpha'}{2}$.

L'angle de Ox avec AM est la moitié de l'angle de Ox avec Δ'. Le théorème est donc démontré.

Application. — Il faut d'abord construire la longueur x, satisfaisant à la relation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Cette relation peut s'écrire,

$$\frac{x}{a} = \frac{a + \frac{b^2}{a}}{a - \frac{b^2}{a}},$$

et, en posant $\frac{b^2}{a} = m$,

$$\frac{x}{a} = \frac{a+m}{a-m}$$

Or, on a

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a}.$$

m est une quatrième proportionnelle aux trois longeurs b, b, a. Connaissant m on aura facilement $a+m$ et $a-m$; x est une quatrième proportionnelle aux trois longueurs a, $a+m$, $a-m$.

La droite Δ étant construite, et un point M de la courbe

étant connu, on joint MA. Puis on fait avec Ox un angle double de l'angle de AM avec Ox. On a ainsi Δ'. En élevant une perpendiculaire à Δ' au point A, on a AP et, par suite, le point P. La droite PM est la tangente demandée.

NOTE. — Une quatrième proportionnelle ne se construit pas avec la règle et l'équerre seulement. La droite qui correspond à l'équation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

se construit avec la règle et l'équerre, connaissant les sommets de la courbe, comme je l'ai indiqué dans ce journal (année 1882, p. 49) et dans ma *Géométrie analytique* (p. 381).

L'auteur de cette solution n'indique pas non plus comment on peut prendre le symétrique d'un point M, par rapport à une droite XY, sans faire usage du compas.

Par le point M on mène deux droites quelconques rencontrant XY aux points A et B ; on complète le parallélogramme MAB et l'on obtient ainsi un point M'. Par M' on mène une parallèle à XY, enfin du point M' on abaisse une perpendiculaire sur cette droite. Le pied M'' de cette perpendiculaire est le point cherché. G. L.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Giat, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) ; Bêche, professeur à l'école normale de Tulle.

ERRATUM

Une erreur s'est glissée dans la figure 6, p. 154. L'asymptote du trident n'est pas OX, mais une droite parallèle à V et située à égale distance de V et de OX. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

172. — On considère une ellipse Γ_1; on imagine une seconde ellipse Γ_2 ayant deux sommets communs avec Γ_1 et admettant pour ses deux autres sommets les foyers de Γ_1. Soit Γ_3 une ellipse déduite de Γ_2, comme Γ_2 l'a été de Γ_1; et ainsi de suite.

On demande combien de ces coniques Γ seront, au début, allongées suivant l'axe OX; combien ensuite on trouvera de coniques allongées suivant OY; et ainsi de suite.

En désignant par a et b les axes de Γ_1, on posera

$$a^2 = pb^2,$$

et l'on distinguera trois cas, suivant que p désigne un nombre entier, un nombre commensurable, ou enfin un nombre irrationnel de la forme $m + \sqrt{n}$; m et n étant commensurables. *(G. L.)*

173. — On donne un triangle rectangle isoscèle; on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. En ce dernier, on mène la tangente à l'hyperbole; lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de la même hyperbole. *(Amigues.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17764-5.

SUR LES POINTS ASSOCIÉS DU PLAN
D'UN TRIANGLE ABC

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Je définis *points associés* des points O, O_a, O_b, O_c, tels que α, β, γ étant les coordonnées homogènes du point O,

$$\begin{array}{lll} -\alpha, \beta, \gamma, & \text{seront celles de} & O_a \\ \alpha, -\beta, \gamma, & — & O_b \\ \alpha, \beta, -\gamma, & — & O_c \end{array}$$

On peut toujours supposer que l'un de ces points (et c'est celui-là que nous désignerons ordinairement par O) a ses coordonnées de même signe et que ce signe est positif. Avec ces conventions, O sera toujours dans l'intérieur du triangle de référence ABC, et les coordonnées des points O, O_a, O_b, O_c peuvent être regardées comme proportionnelles (en grandeur et en signe) aux distances de ces points aux trois côtés du triangle.

Théorème I. — *Les triangles* ABC, $O_a O_b O_c$, *sont homologiques,* O *est leur centre d'homologie.*

L'axe d'homologie a pour équation, si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont les coordonnées de O,

$$\alpha \beta_1 \gamma_1 + \beta \alpha_1 \gamma_1 + \gamma \alpha_1 \beta_1 = 0.$$

Théorème II. — *Les quatre droites* O_bAO_c, AC, AO, AB, *forment un faisceau harmonique et, par suite,* OA *divise* CB *en* A', O_bAO_c *divise* CB *en* A'' *de façon que*

$$\frac{A'C}{BA'} = \frac{A''C}{A''B},$$

de même pour les quatre droites O_cBO_a, BA, BO, BC *et pour* O_aCO_b, CB, CO, CA.

Si l'on ne tient pas compte de la convention sur le signe des coordonnées du point O, convention qui n'a raison d'être que pour aider à voir les positions respectives des points

associés, on peut dire évidemment que : *l'un quelconque des quatre points* O, O_a, O_b, O_c, *a pour associés les trois autres.*

Les sommets du triangle de référence n'ont pas d'autres associés qu'eux-mêmes.

Si l'un des côtés, BC *par exemple, contient le point* O, O_a *se confond avec* O, O_b *et* O_c *se confondent aussi et sont sur* BC *au point conjugué harmonique de* O *par rapport à* B *et à* C.

Le théorème II fait prévoir que si la position d'un point O est déterminée par des propriétés géométriques du rapport des segments que OA, OB, OC, déterminent sur BC, les points O_a, O_b, O_c auront une détermination analogue et celles des propriétés de O qui ne dépendront que de ces rapports donneront lieu à des propriétés analogues des points O_a, O_b, O_c.

Il sera donc intéressant toutes les fois que l'on étudiera un point remarquable O *du triangle, d'examiner ses associés et de chercher les propriétés analogues à celles de* O, *qu'ils peuvent avoir.*

Voici les associés de quelques points remarquables.

1. — Si O est le centre de gravité, O_a, O_b, O_c sont les sommets du triangle obtenu en menant respectivement par A, B, C, des parallèles à BC, AC, AB.

2. — Si O est le centre du cercle inscrit, les points associés sont les centres des cercles ex-inscrits, et plus généralement quatre points associés sont les quatre centres de quatre coniques homothétiques inscrites dans le triangle.

3. — Si O est le centre des médianes antiparallèles (appelé aussi point de Lemoine), les points associés sont les sommets du triangle formé par les tangentes menées au cercle circonscrit aux sommets de ABC.

4. — Si l'on cherche un point O tel que les lignes OA, OB, OC, divisent les côtés opposés en parties proportionnelles à une puissance m (positive, négative, etc.) des côtés adjacents ou, ce qui revient au même (voir *Congrès d'Alger*, H. Brocard), le point O tel que les distances du point aux trois côtés soient proportionnelles à une puissance m' de ces côtés, ou encore le point O tel (voir *Congrès de La Rochelle*, E. Lemoine) que les portions des parallèles menées par O à un côté et comprises entre les deux autres soient

proportionnelles à une puissance m'' de ce côté, ou encore le point O tel (voir *Congrès de La Rochelle*, loc. cit.) que les parallélogrammes formés par deux côtés et les parallèles à ces deux côtés menées par O soient proportionnels à une puissance m''' du troisième côté et d'autres définitions analogues de O qui se lient les unes aux autres, on trouve dans chaque question, en faisant varier les signes des rapports de ces puissances, quatre points O, O_a, O_b, O_c, qui sont des *points associés*. Chaque groupe de ces points qui correspond, dans une définition de O, à une valeur M de la puissance dont il s'agit dans cette définition, coïncide avec un groupe de points appartenant à chaque autre définition mais ne correspondant pas à la même valeur de la puissance, de sorte que si dans chaque définition on fait varier M de $+\infty$ à $-\infty$, les points O, O_a, O_b, O_c, décrivent le même lieu (ce lieu est une courbe transcendante fort compliquée (voir *Congrès de La Rochelle*, page 123), il suit de là comme on le voit facilement que les réciproques de ces proportions sont vraies ; par exemple :

Si les parties des parallèles aux côtés d'un triangle, parties comprises entre deux côtés et menées par un point O, *sont proportionnelles à une puissance* m *de ces côtés* (le cas de $m = 1$ correspond à la question 20 proposée dans *Mathésis* par M. J. Neuberg, 1880), *les points associés de* O *jouiront de la même propriété.*

5. — Par un point I quelconque du plan :

menons une parallèle à BC qui coupe AC en A_c, AB en A_b
— CA — BA en B_a, BC en B_c
— AB — CB en C_b, CA en C_a

et proposons-nous de trouver I_1 tel que : $I_1A_c = I_1B_a = I_1C_b$,
et I_2 tel que : $I_2A_b = I_2B_c = I_2C_a$.

MM. Jerabek et Neuberg se sont occupés de ce problème (*Mathésis*, page 191, 1881) et ont donné des propriétés très élégantes de ces points.

Nous ajouterons qu'il y a d'autres solutions que celle qu'ils ont examinée.

Ces solutions sont les points associés de I_1 et les points associés de I_2.

Les coordonnées homogènes de I_1 sont b, c, a; celles de I_{1a} sont $-b$, c, a, etc.

Les coordonnées homogènes de I_2 sont c, a, b; celles de I_{2a} sont $-c$, a, b, etc.

Les longueurs communes considérées sont :

Pour I_1 et I_2 $\frac{abc}{ab + ac + cb}$;

Pour I_{1a}, I_{1b}, I_{1c} respectivement

$$\frac{abc}{-ab + ac + bc}, \frac{abc}{ab - bc + ac}, \frac{abc}{ab + bc - ac}.$$

Pour I_{2a}, I_2 , I_{2c} respectivement

$$\frac{abc}{ab - ac + bc}, \frac{abc}{-ab + ac + bc}, \frac{abc}{ab - bc + ac}.$$

Si D, D_{1a}, D_{1b}, D_{1c}, D_{2a}, D_{2b}, D_{2c} désignent ces longueurs, on aura

$$D_{1a} = D_{2b}$$
$$D_{1b} = D_{2c}$$
$$D_{1c} = D_{2a}$$
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_{1a}} + \frac{1}{D_{1b}} + \frac{1}{D_{1c}}.$$

Si l'un des dénominateurs est nul, par exemple $-ab + ac + bc$, les points I_{1a}, I_{2b} sont rejetés à l'infini.

L'un des dénominateurs peut être négatif; la convention implicite faite d'après la définition de I_1 et de I_2 sur le sens dans lequel il faut compter $I_1 A_c$, etc., $I_2 A_b$, etc., montre sans difficulté dans quelle région se trouvent les points I.

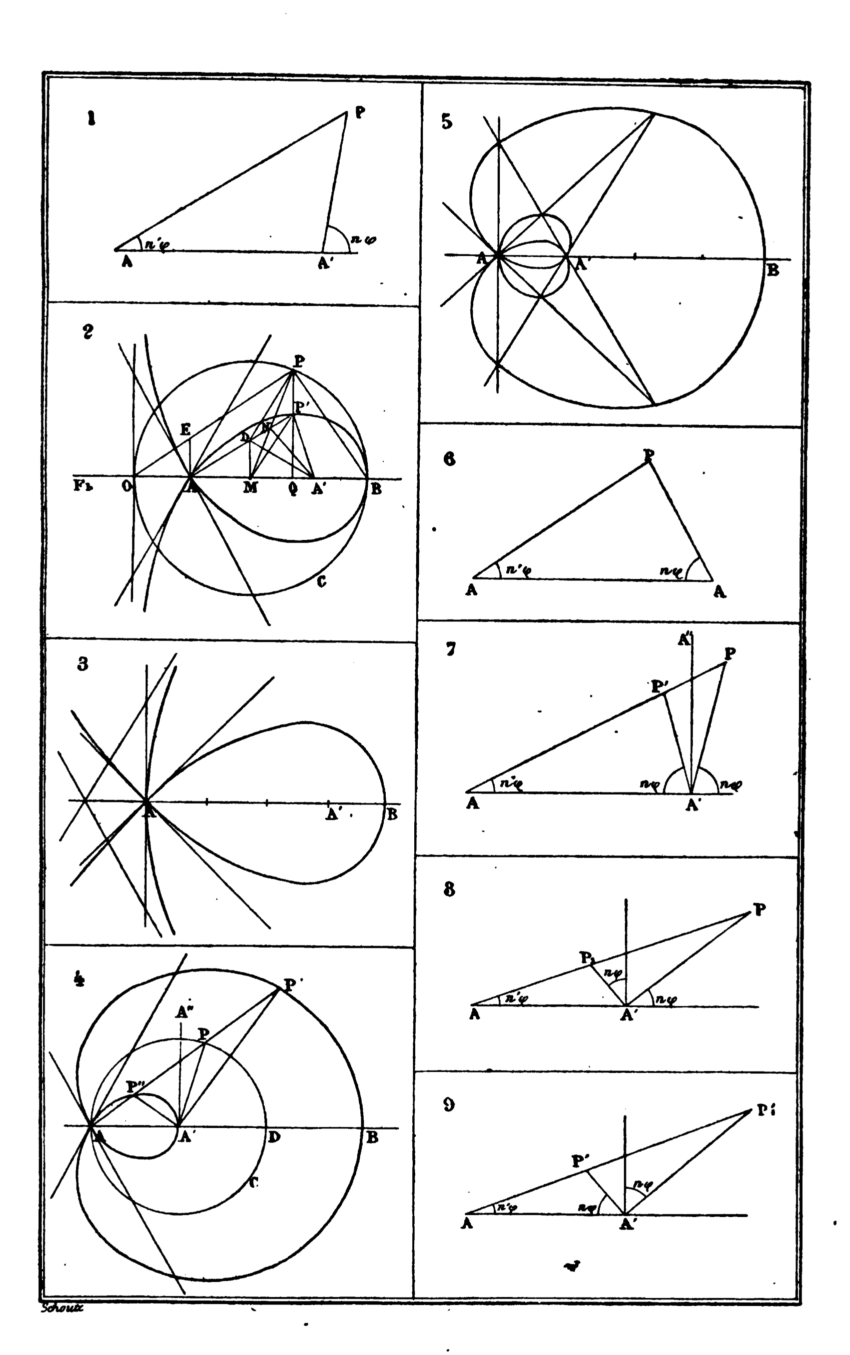
(A suivre.)

SUR LES COURBES SECTRICES

Par M. Schoute, professeur à l'Université de Groningue.

(*Suite*, voir p. 172.)

3. Théorème I. — *Le lieu du point* P, *qui forme avec la base fixe* AA′ *un triangle* APA′ (fig. 1) *dans lequel l'angle supplémentaire de* A′ *est dans un rapport commensurable constant*


1
P
A
A'
$n'\varphi$
$n\varphi$
2
P
P'
E
D
N
F
O
A
M
Q
A'
B
C
3
A
A'
B
4
P'
A''
P
P''
A
A'
D
B
C
5
A
A'
B
6
P
A
A
$n'\varphi$
$n\varphi$
7
A''
P
P'
A
A'
$n'\varphi$
$n\varphi$
$n\varphi$
8
P
P_1
A
A'
$n'\varphi$
$n\varphi$
$n\varphi$
9
P
P'
A
A'
$n'\varphi$
$n\varphi$
$n\varphi$

Schoute

$\frac{n}{n'}$ *à l'angle* A, *est une courbe* $C^{n+n'-1}$ *symétrique par rapport à l'axe* AA', *qui passe* n — 1 *fois par* A, n' *fois par les points cycliques et* n' — 1 *fois par* A'. *En ajoutant successivement la base aux* n — 1 *tangentes de la courbe en* A, *aux* n' — 1 *tangentes de la courbe en* A' *et aux droites menées par un point quelconque de la base parallèlement aux* n — n' — 1 *asymptotes réelles de la courbe, on obtient une étoile respectivement à* n, *à* n' *et à* n — n' *rayons. Enfin, en chacun des points cycliques, les* n' *tangentes coïncident avec la droite qui joint ce point au point* A' *et sur chacune de ces tangentes ce point cyclique compte pour* n *des points d'intersection de la tangente et de la courbe.*

Au fond, ce théorème n'est qu'une conséquence immédiate des résultats généraux qui se rapportent au premier cas des étoiles tournantes dans le même sens. Et la symétrie de la courbe par rapport à la base AA', qui dans cet énoncé est un point nouveau, se démontre en observant que la relation $n\varphi - n'\psi \equiv 0 \pmod{\pi}$ entre φ (l'angle A du triangle) et ψ (le supplément de l'angle A' du triangle) ne change pas, quand on y remplace en même temps φ par $\pi - \varphi$ et ψ par $\pi - \psi$.

La base AA' coupe la courbe $C^{n+n'-1}$, hors des points A et A', en un seul point B, dont la position se trouve sans peine. En effet, si l'angle A et le supplément de l'angle A' sont nuls, auquel cas les trois côtés du triangle AA'P coïncident avec la base, la relation générale $\frac{AP}{A'P} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$ se change en $\frac{AB}{A'B} = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{n}{n'}$. On a donc $\frac{AB}{n} = \frac{A'B}{n'} = \frac{AA'}{n-n'}$, etc.

Suivant la propriété génératrice des courbes $C^{n+n'-1}$, dont il est question dans l'article présent, je les désigne sous le nom général de COURBES SECTRICES. Comme elles n'admettent d'autres points multiples que A, A' et les points cycliques, leur genre est représenté par l'expression $\frac{(n+n'-2)(n+n'-3)}{2}$ $- \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - n'(n'-1)$, qui

se réduit à $(n'-1)(n-n'-1)$. Donc, les courbes sectrices sont unicursales : 1° si $n'=1$, 2° si $n'=n-1$; c'est pourquoi je vais examiner de plus près ces deux cas particuliers.

(A suivre.)

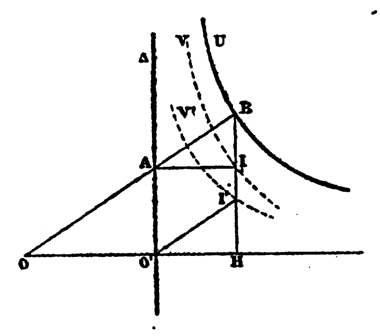
SUR LES COURBES PARALLÈLES
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 176.)

La courbe d'Agnesi et la serpentine.

12. — Considérons maintenant une figure fixe constituée par un point O, une droite Δ, et une courbe quelconque U. Menons par O une transversale OAB, puis traçons par B une parallèle et par A une perpendiculaire à Δ ; ces deux droites se coupent en un point I qui décrit une courbe V, quand OAB tourne autour de O.



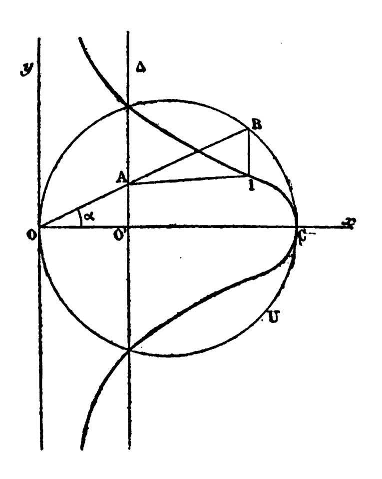
La construction de la tangente à V, au point I, résulte des considérations que nous avons déjà exposées.

En effet, abaissons de O une perpendiculaire sur A et par le pied O' de cette perpendiculaire traçons une droite O'I' parallèle à AB. Les deux triangles ABI, O'I'H sont égaux; en particulier nous pouvons dire que I'H = BI. Le point I' décrit une certaine courbe V' qui est déduite de U point par point par une construction que nous avons déjà étudiée.

Ainsi du tracé de la tangente à U, nous savons déduire celui de la tangente à V'. D'autre part BI étant égal à I'H nous avons encore montré comment on pouvait construire

la tangente à V connaissant les tangentes aux points correspondants des courbes U et V' : On peut donc considérer comme résolu le problème qui visait la construction de la tangente au lieu décrit par le point I.

13. — Deux courbes intéressantes peuvent être tracées par points et par tangentes au moyen de la génération précédente; nous voulons parler de la courbe d'Agnesi (*) et de la Serpentine.



La courbe d'Agnesi, dont nous parlerons d'abord, peut être envisagée comme formant un cas particulier des cubiques Γ_3 qui réalisent les deux conditions suivantes :

1° *Elles ont un axe de symétrie* Δ;

2° *Elles possèdent un point double rejeté à l'infini dans la direction de cet axe.*

Cherchons d'abord l'équation générale des courbes Γ_3. A cet effet, prenons des axes rectangulaires, Δ étant l'axe Ox. L'équation de Γ_3 étant $f = 0$, on voit d'abord : 1° que f ne doit renfermer x qu'à la première puissance, puisque Γ_3 possède un point double à l'infini dans la direction Ox; 2° que f ne peut avoir aucun terme en y et en y^3, puisque Ox est un axe de symétrie. L'équation de la courbe se réduit donc à la forme

$$f = xy^2 + \alpha y^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

(*) La courbe d'Agnesi se trouve citée dans Houël, *Cours de calcul infinitésimal*, t. II, p. 264; et dans Günther, *Parabolische Logarithmen* 1882, p. 59. M. Schoute, professeur à l'université de Groningue, a indiqué, d'après M. Godefroy, l'élégante construction de la tangente à la courbe d'Agnesi que nous signalons plus loin, dans un mémoire ayant pour titre: *Sur la construction de courbes unicursales par points et par tangentes.*

Maria-Gaetana Agnesi, mathématicienne du XVIII[e] siècle, est surtout connue par son ouvrage *Inst. anal. ad uso della gioventa italiana* (Milano, 1748).

En prenant maintenant pour axe Oy l'asymptote réelle de la courbe $(x + \alpha = 0)$, on obtient pour l'équation réduite des cubiques Γ_3 la forme suivante :

$$xy^2 + mx + n = 0.$$

Voici une génération par points et par tangentes de ces cubiques qui renferment la courbe d'Agnesi comme cas particulier.

14. — Prenons, pour spécifier la courbe U dont nous avons parlé tout à l'heure, un cercle passant par O et dont le centre soit placé sur la perpendiculaire abaissée de O sur Δ.

Ayant choisi les axes qu'indique la figure, si nous posons $OO' = h$, $OC = d$, nous avons

$$y = h \operatorname{tg} \alpha,$$

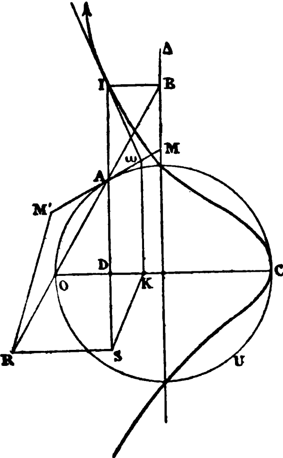
et

$$x = d \cos^2 \alpha.$$

L'équation du lieu décrit par I est donc

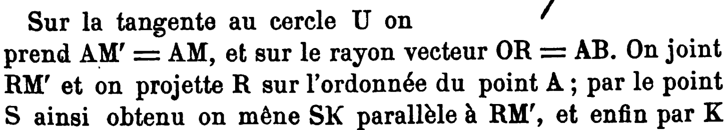
$$y^2x + h^2 (x - d) = 0.$$

A cette équation correspond une courbe affectant la forme générale indiquée par la figure. La tangente, en un point pris sur cette cubique, s'obtient par une construction qui découle des principes généraux que nous avons établis tout à l'heure ; nous allons d'ailleurs effectuer explicitement cette construction sur la courbe d'Agnesi.



15. — La courbe d'Agnesi correspond au cas particulier où la droite Δ passe par le centre de la circonférence génératrice. Soit I un point de cette courbe ; pour obtenir la tangente en ce point la construction est la suivante :

Sur la tangente au cercle U on


prend $AM' = AM$, et sur le rayon vecteur $OR = AB$. On joint RM' et on projette R sur l'ordonnée du point A ; par le point S ainsi obtenu on mène SK parallèle à RM', et enfin par K

une parallèle à Δ. Cette parallèle rencontre MM′ en un certain point qui appartient à la tangente cherchée.

La construction indiquée par M. Godefroy *(loc. cit.)* est sensiblement plus simple; M. Godefroy observe que les trois points D, ω, B sont en ligne droite et il détermine ainsi, immédiatement, le point ω. Mais cette remarquable propriété de la courbe d'Agnesi ne s'applique plus aux cubiques plus générales qui correspondent au cas où Δ est une perpendiculaire quelconque au diamètre OC; notre construction s'applique au contraire, sans modification, à toutes ces cubiques.

16. — La serpentine, suivant l'expression qu'a employée Newton, et qui rappelle la forme de cette courbe, est une cubique γ_3 qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Elle a un centre,*

2° *Elle possède un point double isolé à l'infini.*

Cherchons d'abord l'équation générale des courbes γ_3.

Prenons le centre pour origine; pour axe Oy la droite qui joint le point O au point double situé à l'infini; enfin pour axe Ox l'asymptote réelle de la courbe, droite qui passe nécessairement par le centre.

L'équation de la courbe est évidemment de la forme

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = mx + ny\,;$$

mais, à une valeur donnée pour x ne correspond qu'une seule valeur de y; on a donc $C = o$ et $D = o$. De plus $y = o$ doit être une asymptote; on a donc $A = o$ et en supposant $B = 1$, l'équation réduite des serpentines est

$$x^2y = mx + ny.$$

Nous supposerons que les axes sont rectangulaires; une projection orthogonale permet d'ailleurs de passer du cas général à celui que nous allons examiner.

17. — Prenons la figure que nous avons considérée au paragraphe précédent, mais avec cette simple modification que Δ, au lieu d'être perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle, soit au contraire parallèle à ce diamètre.

Ayant choisi les axes qu'indique la figure, d désignant le

diamètre du cercle et h la distance OH du pôle à Δ, on a

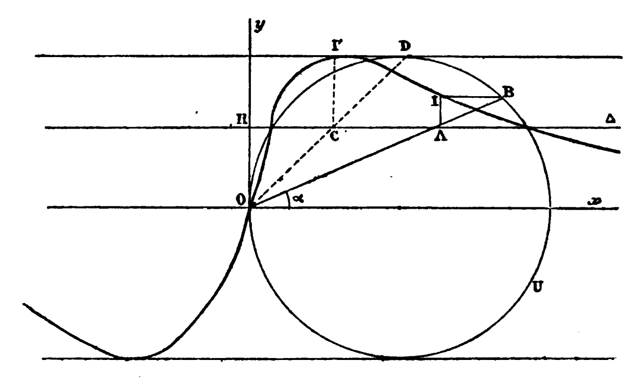
$$x = h \cot \alpha,$$

et

$$y = d \sin \alpha \cos \alpha.$$

En éliminant α entre ces deux égalités, on a

$$y(x^2 + h^2) = dhx.$$



Le lieu décrit par le point I est donc une serpentine disposée comme le montre la figure. La construction de la tangente en un point de cette courbe est la même que celle que nous avons indiquée pour la courbe d'Agnesi, et c'est justement la généralité de cette construction, en même temps que sa simplicité, qui lui donne peut-être quelque mérite.

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE

Par M. **Henry Bourget,** élève au Lycée de Clermont-Ferrand.

Lorsqu'on étudie la géométrie à deux dimensions, on rencontre dans la théorie de l'ellipse deux cercles, dont les propriétés sont intimement liées à celles de la courbe; on les nomme les deux *cercles principaux* de l'ellipse. Il existe de même, en géométrie à trois dimensions, dans la théorie de l'ellipsoïde, trois sphères dont les propriétés sont intimement liées à celles de la surface; nous les nommerons les trois *sphères principales* de l'ellipsoïde.

Cette note a pour but de démontrer les théorèmes fondamentaux de la théorie de ces sphères. Ces théorèmes sont intéressants en ce qu'ils sont les analogues de théorèmes de la géométrie du plan : c'est pour faire ressortir cette analogie que nous avons mis en regard les propositions de la géométrie à deux et à trois dimensions.

ELLIPSE

Théorème. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* ox, oy *et deux cercles* (C_1), (C_2) *de centre* o *et de rayons* a, b; *on mène par le point* o *un rayon qui coupe* (C_1) *en* A, (C_2) *en* B. *On tire par* A *une droite perpendiculaire à* ox, *par* B *une droite perpendiculaire à* oy. *Ces droites se coupent en un point* M *qui décrit, lorsque le rayon* OAB *varie, l'ellipse* (U), *qui a pour axes* ox, oy *et pour demi-longueurs de ces axes* a, b.

ELLIPSOÏDE

Théorème. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* ox, oy, oz *et trois sphères* (C_1), (C_2), (C_3) *de centre* o *et de rayons* a, b, c, *on mène par le point* o *un rayon qui coupe* (C_1) *en* A, (C_2) *en* B, (C_3) *en* C. *On tire par* A *un plan perpendiculaire à* ox, *par* B *un plan perpendiculaire à* oy, *par* C *un plan perpendiculaire à* oz. *Ces trois plans se coupent en un point* M *qui décrit, lorsque le rayon* OABC *varie, l'ellipsoïde* (U) *qui a pour axes* ox, oy, oz *et pour demi-longueurs de ces axes* a, b, c.

Remarque. — Nous ne nous occupons que des points d'intersection avec les cercles et les sphères qui sont situés d'un même côté du point *o*, de façon que le point M, résultant d'un rayon, soit dans le même trièdre des coordonnées que ce rayon.

Prenons comme axes de coordonnées *ox*, *oy*. Si α, β désignent les cosinus directeurs du rayon OAB, les coordonnnées des points A, B seront

Prenons comme axes de coordonnées *ox*, *oy*, *oz*. Si α, β, γ désignent les cosinus directeurs du rayon OABC, les coordonnées des points A, B, C seront :

$$x_1 = a\alpha,\ y_1 = a\beta$$
$$x_2 = b\alpha,\ y_2 = b\beta$$

les perpendiculaires à ox, oy menées par A, B ont pour équations :

$$x = a\alpha,\ y = b\beta$$

et on a de plus $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Éliminant α, β entre ces trois équations, on obtient celle du lieu du point M, qui est

$$(U) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

c. q. f. d.

$$x_1 = a\alpha,\ y_1 = a\beta,\ z_1 = a\gamma$$
$$x_2 = b\alpha,\ y_2 = b\beta,\ z_2 = b\gamma$$
$$x_3 = c\alpha,\ y_3 = c\beta,\ z_3 = c\gamma$$

les plans perpendiculaires à ox, oy, oz, menés par A, B, C ont pour équations:

$$x = a\alpha,\ y = b\beta,\ z = c\gamma$$

et on a de plus $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Éliminant α, β, γ entre ces quatre équations, on obtient celle du lieu du point M, qui est

$$(U) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

c. q. f. d.

Ces théorèmes nous donnent immédiatement les solutions des problèmes suivants :

PROBLÈME I. — *Étant données les coordonnées des points* A, B, *trouver les coordonnées du point correspondant* M *de l'ellipse* (U).

PROBLÈME II. — *Étant données les coordonnées du point* M *de l'ellipse* (U), *trouver les coordonnées des points* A, B *situés sur le rayon correspondant.*

PROBLÈME I. — *Étant données les coordonnées des points* A, B, C, *trouver les coordonnées du point correspondant* M *de l'ellipsoïde* (U).

PROBLÈME II. — *Étant données les coordonnées du point* M, *de l'ellipsoïde* (U), *trouver les coordonnées des points* A, B, C *situés sur le rayon correspondant.*

Nous avons ainsi une génération ponctuelle de l'ellipse et de l'ellipsoïde. Les théorèmes qui suivent vont nous donner une génération tangentielle de cette ligne et de cette surface.

Théorème. — *Étant donné un des rayons* OAB, *si on mène en* A *la tangente en* (C_1) *qui coupe* ox *en* T_1, *en* B *la*

Théorème. — *Étant donné un des rayons* OABC, *si on mène en* A *le plan tangent à* (C_1) *qui coupe* ox *en* T_1, *en* B

tangente en (C_2), *qui coupe* oy *en* T_2; *la droite* T_1T_2 *sera la tangente à l'ellipse* (U) *au point* M *correspondant au rayon donné ; c'est-à-dire que* OAB *variant, la droite* T_1T_2 *enveloppe l'ellipse* (U).

Les coordonnées des points A, B étant,

$$x_1 = a\alpha, \quad y_1 = a\beta$$
$$x_2 = b\alpha, \quad y_2 = b\beta$$

les tangentes en ces points aux cercles (C_1), (C_2) ont pour équations

$$\alpha x + \beta y - a = 0$$
$$\alpha x + \beta y - b = 0$$

les points où elles coupent *ox*, *oy*, ont pour coordonnées

$$x = \frac{a}{\alpha}, \quad y = 0$$
$$x = 0, \quad y = \frac{b}{\beta}$$

la droite passant par ces deux points est

$$\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire, précisément l'équation de la tangente à l'ellipse (U) au point de coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, c'est-à-dire au point M.

c. q. f. d.

le plan tangent à (C_2) *qui coupe* oy *en* T_2, *en* C *le plan tangent à* (C_3) *qui coupe* oz *en* T_3 ; *le plan* $T_1T_2T_3$ *sera le plan tangent à l'ellipsoïde* (U) *au point* M *correspondant au rayon donné ; c'est-à-dire que* OABC *variant, le plan* $T_1T_2T_3$ *enveloppe l'ellipsoïde* (U).

Les coordonnées des points A, B, C étant,

$$x_1 = a\alpha \quad y_1, = a\beta, \quad z_1 = a\gamma$$
$$x_2 = b\alpha \quad y_2, = b\beta, \quad z_2 = b\gamma$$
$$x_3 = c\alpha \quad y_3, = c\beta, \quad z_3 = \gamma c$$

les plants tangents en ces points aux sphères (C_1), (C_2), (C_3) ont pour équations.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - a = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - b = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - c = 0$$

les points où elles coupent *ox*, *oy*, *oz* ont pour coordonnées

$$x = \frac{a}{\alpha}, \quad y = 0, \quad z = 0$$
$$x = 0, \quad y = \frac{b}{\beta}, \quad z = 0$$
$$x = 0, \quad y = 0. \quad z = \frac{c}{\gamma}$$

le plan passant par ces trois points est

$$\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} + \frac{\gamma z}{c} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire, précisément l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde (U) au point de coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, c'est-à-dire au point M. *c. q. f. d.*

Nous avons donc des définitions ponctuelles et tangentielles de l'ellipsoïde entièrement analogues aux définitions connues de l'ellipse. De même que de ces dernières nous tirons facilement la construction géométrique des éléments de l'ellipse; nous déduirons de ces définitions la construction géométrique des éléments de l'ellipsoïde. Remarquons qu'il importe de ne pas séparer les deux cercles principaux, on trouve mieux ainsi les théorèmes analogues dans la géométrie à trois dimensions. Pour finir, remarquons encore que cette note explique la notation $a \cos \varphi$, $b \cos \chi$, $c \cos \psi$ que l'on emploie dans la théorie de l'ellipsoïde pour désigner les coordonnées d'un point de cette surface; φ, χ, ψ ne sont rien autre chose que les angles du rayon OABC avec les axes de coordonnées.

SUR UNE TRANSFORMATION POLAIRE

DES COURBES ET DES SURFACES

Par **H. Le Pont.**

1. — On appelle *transformations polaires* ou encore *transformations centrales*, les transformations définies de la manière suivante :

Soit un point fixe O que nous appellerons pôle et que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires. Joignons ce point à un point M (XYZ) de l'espace et sur le rayon vecteur OM prenons un troisième point m (xyz) tel que

$$f(\mathrm{OM}, \mathrm{O}m) = 0.$$

Cette équation est dite équation caractéristique de la transformation; les constantes qu'elle renferme en sont les modules.

La transformation polaire est linéaire lorsque son équation caractéristique est du premier degré par rapport à chacune des variables $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et $\mathrm{O}m = r$.

Plusieurs transformations polaires linéaires ont fait l'objet de nombreux travaux (*).

(*) Voyez, entre autres (*Mathésis*, t. IV, p. 74, 1882), une note de M. Maurice d'Ocagne, sur ce même sujet.

Les conchoïdes des courbes et des surfaces, par exemple, ne sont que les transformées polaires de ces courbes et de ces surfaces, l'équation caractéristique de la transformation étant

$$R \pm r = 2C.$$

Si nous considérons l'équation caractéristique

$$Rr = C,$$

nous retrouvons la transformation par rayons vecteurs réciproques. Notons, en passant, que, avec l'homothétie définie par la formule $R = Kr$, cette transformation est la seule des transformations polaires linéaires qui soit isogonale. Prenons, en effet, deux points infiniment voisins M (R) et M' (R + dR), et leurs points correspondants $m(r)$ et m' $(r + dr)$; λ, μ, ν et $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ étant les angles qui font avec les axes de coordonnées les rayons mM et m'M'; la condition pour que la transformation soit isogonale est que l'on ait

$$2\left(\frac{R}{dR} \pm \frac{r}{dr}\right)(\sin\lambda\cos\lambda d\lambda + \sin\mu\cos\mu d\mu + \sin\nu\cos\nu d\nu)$$
$$= \left[\left(\frac{R}{dR}\right)^2 - \left(\frac{r}{dr}\right)^2\right][\sin^2\lambda\,(d\lambda)^2 + \sin^2\mu(d\mu)^2 + \sin^2\nu(d\nu)^2]$$

quels que soient λ, μ, ν, ce qui exige que

$$\frac{dR}{R} \pm \frac{dr}{r} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Rr = \text{const}, \text{ ou } R = Kr;$$

la première formule correspond aux figures inverses, la seconde aux figures homothétiques.

2. — La transformation que nous nous proposons d'étudier aujourd'hui, est définie par la formule

$$\frac{c}{r} + \frac{C}{R} = 1.$$

C'est, comme on le voit, une généralisation de la transformation homologique due à Poncelet et dont l'équation caractéristique est

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{2}{k}.$$

Ces deux transformations sont des transformations dou-

bles, c'est-à-dire que, à chaque point donné M d'une figure, correspondent deux points m dans la figure transformée.

Les formules de transformation sont

$$x = \frac{cX}{R - C}, \quad y = \frac{cY}{R - C}, \quad z = \frac{cZ}{R - C}, \quad r = \frac{cR}{R - C}, \qquad (f)$$

$$X = \frac{Cx}{r - c}, \quad Y = \frac{Cy}{r - c}, \quad Z = \frac{Cz}{r - c}, \quad R = \frac{Cr}{r - c}. \qquad (F)$$

Les dernières formules donnent immédiatement la construction des points correspondants d'un point quelconque de l'espace.

Nous prendrons toujours comme point donné un point (X, Y, Z), c'est-à-dire que nous emploierons toujours dans la transformation les formules (F).

Nous obtenons immédiatement les théorèmes suivants:

1° La transformée d'une surface d'ordre n est une surface d'ordre $2n$.

2° La transformée d'un plan est une surface de révolution du second ordre ayant pour foyer l'origine et pour plan directeur un plan parallèle au plan considéré. En désignant par D la distance du pôle à ce plan, la distance du pôle au plan directeur de la surface transformée est $-\frac{c}{C}$ D. Lorsque D est plus grand en valeur absolue que C, la surface est un ellipsoïde; lorsque D est plus petit que C en valeur absolue, la surface est hyperboloïde à deux nappes. Enfin, lorsque le plan est tangent à la sphère décrite du pôle comme centre avec C pour rayon, la transformée est un paraboloïde dont le plan directeur est tangent à la sphère décrite du pôle comme centre avec un rayon égal à c.

Les transformées de deux plans quelconques sont des surfaces de révolution de même foyer et dont les plans directeurs font entre eux l'angle des deux plans. Tout plan passant par le pôle se transforme en lui-même.

3° Une droite quelconque a pour transformée une conique ayant pour foyer le pôle et pour directrice la parallèle menée à cette droite dans le plan qu'elle détermine avec le pôle. La distance de l'origine à la directrice est $-\frac{c}{C}$ D, en désignant par D la distance de l'origine à la droite considérée.

Les directrices de deux coniques confocales transformées de deux droites font entre elles l'angle de ces deux droites.

Toute droite passant par le pôle se transforme en elle-même.

4° Toute sphère ayant pour centre le pôle se transforme en une sphère concentrique.

La sphère décrite du pôle comme centre avec $(C + c)$ pour rayon, se transforme en elle-même. Nous l'appellerons sphère principale.

La sphère principale jouit en outre de cette propriété remarquable : le rapport anharmonique du système formé par le pôle, un point quelconque de l'espace, un des points correspondants à ce point et un des points d'intersection du rayon vecteur avec la sphère principale, est constant et égal à $-\frac{C}{c}$.

(A suivre.)

ÉCOLE NORMALE (CONCOURS DE 1885)

Représenter la partie solide d'une sphère extérieure à un cône de révolution (*).

La sphère a pour centre le point (O, O′)

$$x = 0,\ y = 10,\ z = 10 \text{ centimètres},$$

elle passe par le sommet du cône (S, S′)

$$x = 0,\ y = 16,\ z = 16 \text{ centimètres}.$$

L'axe du cône passe par le point

$$x = 0,\ y = 10,\ z = 22;$$

Ses génératrices font avec l'axe un angle de 45°.

Méthode. — Changement de plan ou rotation, ayant pour but de prendre le plan de profil OO′ SS′ comme plan de projection, en profitant du fait que ce plan de profil est un plan de symétrie.

Dans le nouveau système, on emploiera comme surfaces auxiliaires des sphères ayant pour centre un point quelconque de l'axe du cône. De préférence, on prendra des sphères inscrites dans le cône.

(*) On prendra comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

Propriétés. — La projection auxiliaire de la courbe est une parabole ayant précisément son sommet au sommet du cône, et dont on trouve immédiatement deux points à l'intersection des contours apparents dans le nouveau système.

Si l'on effectuait un deuxième changement de plan horizontal, en prenant comme nouvelle ligne de terre une perpendiculaire sur l'axe du cône, la projection horizontale nouvelle de la courbe serait une circonférence, grâce à l'existence d'un cylindre de révolution parallèle à l'axe du cône et passant par l'intersection.

Le sommet du cône est un point double dans l'espace, les tangentes étant les génératrices d'intersection du cône avec le plan tangent à la sphère. En projection, mais pas dans l'espace, ces tangentes passent comme vérification par les points le plus à droite et le plus à gauche des contours apparents de la sphère.

Les projections du sommet du cône sont de plus des points doubles en projection à cause de l'existence d'une génératrice verticale et d'une génératrice debout sur le cône.

Il résulte de là que les projections du sommet du cône sont des points triples, en projection, la troisième tangente étant parallèle à la ligne de terre.

Étant donnée une surface de révolution et une sphère, les sphères limites permettent de mener à la projection de la courbe sur le plan de symétrie une tangente parallèle à une direction donnée. De cette remarque on déduit les tangentes horizontales ainsi que les tangentes de front.

Par exemple, pour trouver le point le plus haut, il suffit d'employer, comme sphère auxiliaire, la sphère inscrite dans le cône ayant pour centre le point donné $x = 0$, $y = 10$, $z = 22$. Cette sphère auxiliaire coupera la sphère donnée suivant une parallèle tangente à la courbe.

Nous avons dit qu'il existait un cylindre de révolution passant par l'intersection.

L'étude de ce cylindre permet de trouver le point le plus à droite, et le point le plus à gauche. Nous dirons d'abord que ces points se trouvent sur les contours apparents du cylindre, à une distance de part et d'autre du grand axe de

la feuille égale au rayon du cylindre ou à la moitié du rayon de la sphère.

Si l'on veut de plus trouver exactement ces points, on remarque que les génératrices de contour apparent du cylindre dans le système primitif se projettent dans le système auxiliaire suivant l'axe du cylindre A'_1. Considérons alors dans le système auxiliaire cette droite A'_1 comme un parallèle de la sphère donnée, et faisons passer par ce parallèle une sphère auxiliaire ayant son centre au sommet du cône, elle donnera précisément les points demandés.

Enfin, il reste à observer que les deux projections de l'intersection sont symétriques par rapport à la ligne de terre; cela résulte de ce que l'intersection est symétrique par rapport au premier plan bissecteur, mais il faut bien faire attention que ce ne sont pas les projections d'un même point qui sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

J. C.

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 181.)

§ V. — *Volumes.*

On sait que, comme le carré, le cube se rattache aux grandeurs de la première famille.

Lorsqu'on prend comme cube-unité le cube dont le côté est l'unité de longueur, le volume du cube a pour mesure la troisième puissance du nombre qui mesure son côté.

Théorème XX. — *Le moment du cube est égal au triple de son volume.*

Théorème XXI. — *Soit une surface fermée quelconque* S, *de moment* μ *: on trace à travers cette surface un réseau de cubes adjacents, égaux, infiniment petits, la somme* V' *des volumes de tous les cubes compris dans la surface* S *a une limite*

constante V, *quelles que soient la loi de variation et l'orientation des cubes.*

Cette limite constante V est égale à $\frac{\mu}{3}$: V est, par définition, le volume de la surface fermée S.

Théorème XXII. — *Lorsqu'une surface fermée résulte du groupement de plusieurs surfaces fermées partielles, le volume de la surface totale est la somme des volumes des surfaces partielles.*

Théorème XXIII. — *Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

En prenant, en effet, le moment des faces par rapport au sommet, on trouve pour le moment total le produit de la base par la hauteur.; le volume est donc le $\frac{1}{3}$ de ce produit (th. XXI). De même pour le cône.

Théorème XXIV. — *Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de la base* B *par la hauteur* h.

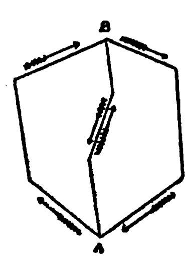
On démontre d'abord ce théorème pour le prisme triangulaire qu'on peut considérer comme un groupement de trois pyramides de base B et de hauteur h; le volume du prisme est alors égal à la somme des volumes de ces trois pyramides (th. XXII); or, ces trois pyramides ont chacune pour volume $\frac{1}{3}$ Bh, le prisme a donc pour volume Bh.

On passe de là au prisme à base polygonale quelconque et au cylindre.

Théorème XXV. — *Le volume d'une sphère est égal au tiers du produit de sa surface* S *par son rayon* R.

Considérons un polyèdre à faces infiniment petites circonscrit à la sphère et décomposons-le en pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère et pour bases respectives les faces du polyèdre ; toutes ces pyramides ont pour hauteur commune le rayon R et la somme de leurs bases est la surface S′ du polyèdre ; le volume du polyèdre

est donc égal à $\frac{1}{3}$RS′; à la limite, S′ devient égal à S (th. XII); on a donc pour le volume de la sphère $\frac{1}{3}$R.S



On voit combien cette méthode nous donne simplement le volume de la pyramide, du prisme et de la sphère. De plus, en suivant cette marche, la théorie des volumes est en quelque sorte calquée sur celle des aires planes.

Nota. — La figure ci-jointe doit remplacer celle qui, par erreur, a été mise à la page 136 (numéro de juin), figure qui est relative au théorème IV.

QUESTIONS D'EXAMENS

29. — *On considère des coniques* Γ *inscrites dans un rectangle; parallèlement à une direction fixe on mène à ces coniques des tangentes* Δ; *trouver le lieu décrit par le point de contact* I, *de* Δ *avec* Γ.

Si l'on prend pour axes de coordonnées les médianes du rectangle l'équation générale des coniques Γ est (de Longchamps, *Géom. an.*, t. I, p. 353)

$$\frac{x^2}{a^2} + 2\lambda\frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} + \lambda^2 - 1 = 0;$$

mais, dans cette question qui n'exige pas que les axes soient rectangulaires, il vaut mieux observer que les diagonales du rectangle considéré sont deux diamètres conjugués et, dans ce système d'axes, l'équation de Γ est (*loc. cit.*)

$$\frac{x^2}{ta'^2} + \frac{y^2}{b'^2(1-t)} = 1, \qquad (1)$$

t désignant un paramètre variable.

Soient x, y les coordonnées de I; m désignant le coefficient angulaire donné, le diamètre conjugué de cette direction a pour équation

$$\frac{x}{ta'^2} + m\frac{y}{(1-t)b'^2} = 0. \qquad (2)$$

Cette dernière équation donne successivement

$$\frac{\frac{x}{a'^2}}{t} = \frac{\frac{-my}{b'^2}}{1-t} = \frac{\frac{x}{a'^2} - \frac{my}{b'^2}}{1},$$

et

$$\frac{\frac{x^2}{ta'^2}}{x} = \frac{\frac{-y^2}{b'^2(1-t)}}{\frac{y}{m}} = \frac{1}{x - \frac{y}{m}}.$$

L'équation du lieu est donc

$$\left(x - \frac{y}{m}\right)\left(\frac{x}{a'^2} - \frac{my}{b'^2}\right) = 1. \qquad (3)$$

Cette équation représente une hyperbole H passant par les sommets du rectangle proposé, points que l'on prévoit *à priori*; de plus, ses asymptotes sont en évidence, d'après (3). La courbe cherchée se trouve, par cette remarque, bien déterminée. On peut distinguer sur H les points qui proviennent des ellipses ou des hyperboles du réseau.

Remarque. — Si l'on demandait le lieu des sommets ou le lieu des foyers des coniques Γ, l'équation (1) devrait être préférée à l'équation (2). Le lieu des sommets est une quartique Q ayant pour équation

$$y^4 - x^4 - b^2y^2 + a^2x^2 = 0;$$

Q se compose : 1° d'un double folium en forme de 8, 2° de deux branches hyperboliques asymptotes aux bissectrices et présentant une sinuosité dans la partie qui pénètre dans l'intérieur du rectangle.

Le lieu du foyer F est une hyperbole équilatère. On obtient son équation

$$y^2 - x^2 = b^2 - a^2,$$

soit en exprimant que la projection de F sur deux côtés adjacents du rectangle donne deux points M, M' à la même distance du centre O ; soit en écrivant que les tangentes issues de F sont parallèles aux directions isotropes du plan.

QUESTIONS PROPOSÉES

174. — On considère un cercle Δ, du centre O rapporté à deux diamètres rectangulaires.

Sur OX, on prend un point fixe P; et, par P on mène une transversale mobile qui coupe Δ aux points A et B. On propose de trouver le lieu décrit par le point I, centre des hauteurs du triangle AOB.

Ce lieu est une cubique Γ, unicursale, passant par les ombilics du plan.

En posant $OP = d$, et en désignant par R le rayon de Δ, on examinera les deux cas particuliers suivants :

$$1^{\circ} \quad d = R,$$

$$2^{\circ} \quad d = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

On trouve, dans le premier cas, une strophoïde et, dans le second cas, une cissoïde. Expliquer ces résultats par des considérations géométriques.

Revenant au cas général et observant que I et le pôle de AB sont deux points symétriques par rapport à AB, on propose de construire la tangente à Γ, au point I, en s'appuyant sur les propriétés des transversales réciproques. *(G. L.)*

175. — On donne une conique T et un point fixe P : trouver le lieu décrit par le sommet A d'un triangle ABC circonscrit à T, sachant que les droites qui joignent les points A, B, C aux points de contact des côtés opposés concourent en P.

(W.)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19452-5.

SUR LES POINTS ASSOCIÉS DU PLAN
D'UN TRIANGLE ABC

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 193.)

Théorème III. — *Si par un point* O *je mène les antiparallèles aux trois côtés d'un triangle et que j'appelle:* ξ *la longueur de la partie de* BC *comprise entre les deux antiparallèles à* AC *et à* AB, η *la longueur de la partie de* CA *comprise entre les deux antiparallèles à* BA *et à* BC, ζ *la longueur de la partie de* AB *comprise entre les deux antiparallèles à* CB *et à* CA ;

Et que je considère les points associés O_a, *etc., et les valeurs correspondantes* ξ_a, η_a, ζ_a, *etc., on aura, en valeur absolue :*

$$\frac{\xi}{\xi_a} = \frac{\eta}{\eta_a} = \frac{\zeta}{\zeta_a}.$$

Observons que, pour le point dont les coordonnées homogènes sont tg A, tg B, tg C et pour ses associés, ces longueurs sont égales entre elles. (Voir Lemoine, *Bulletin de la Soc. math. de France*, p. 76, 1884.)

Théorème IV. — En appelant, avec M. de Longchamps, *points réciproques* deux points O et O′ tels que les droites qui joignent ces points à un sommet du triangle coupent le côté opposé à ce sommet en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté, on a la proposition suivante :

Si O *et* O′ *sont deux points réciproques, les associés* O_a, O_b, O_c *de* O *et les associés* O'_a, O'_b, O'_c *de* O′, *sont réciproques deux à deux.*

Théorème V. — *Si* α, β, γ *représentent les distances d'un point* O *aux trois côtés du triangle et que l'on cherche le point tel que* $M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + P^2\gamma^2$ *soit un minimum (*M^2, N^2, P^2 *étant des quantités données), on trouve un point* O *dont les coordonnées*

homogènes sont :

$$\frac{a}{M^2}, \frac{b}{N^2}, \frac{c}{P^2}.$$

Si $M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 - P^2\gamma^2$ *est susceptible d'un minimum, ce qui arrivera lorsque l'on aura*

$$\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} - \frac{c^2}{P^2} < 0,$$

ce minimum aura lieu pour O_c *associé de* O.

Théorème VI. — *Si deux points* O *et* O' *sont conjugués isogonaux* (c'est-à-dire sont les deux foyers d'une même conique inscrite à ABC, voir J. Neuberg, ***Mémoire sur le Tétraèdre*** ; t.XXXVII des Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique), *les points associés* O_a, O'_a ; O_b; O'_b; O_c O'_c, *sont deux à deux conjugués isogonaux* (*).

De la définition même des points associés il résulte que si O décrit une droite, une conique, une courbe de degré n, les points associés O_a, O_b, O_c décriront chacun une droite, une conique, une courbe de degré n ; que si O parcourt une droite K qui enveloppe une courbe N de degré n, O_a, O_b, O_c parcourront des droites K_a, K_b, K_c qui engendrent des courbes N_a, N_b, N_c de degré n ; que si O est le point de contact de N avec K, O_a, O_b, O_c seront respectivement les points de contact de N_a, N_b, N_c avec K_a, K_b, K_c.

Si l'équation de la courbe que décrit le point O est $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, celle de la courbe décrite par O_a sera $\varphi(-\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Il y a donc là un cas particulier intéressant à étudier, des transformations homographiques.

Connaissant la tangente au point O *de la courbe décrite par* O, *trouver la tangente à la courbe décrite par le point associé,* O_c *par exemple.*

On démontre facilement la construction suivante;

La tangente en O à la courbe décrite par O coupe AB en J; la droite JO_c est la tangente en O_c à la courbe lieu de O_c.

(A suivre.)

(*) Les points conjugués isogonaux de M. Neuberg sont aussi les points que M. Mathieu a étudiés autrefois (Nouv. an. 1865) et qu'il a nommés *points inverses.* G. L.

SUR LES COURBES SECTRICES (*)

Par M. Schoute, professeur à l'Université de Groningue.

(*Suite*, voir p. 196.)

4. — Cas $n' = 1$.

Dans ce cas, les courbes sectrices d'ordre n se rapportent à la division de l'angle en un nombre entier n de parties égales; elles sont donc les courbes sectrices par excellence.

Chacune des courbes sectrices C^n est déterminée par son point multiple A, l'étoile mutilée de n rayons des $n - 1$ tangentes en ce point, l'étoile mutilée de $n - 1$ rayons des $n - 2$ droites menées par A parallèlement aux asymptotes, les deux points cycliques et le point simple B situé sur le rayon manquant des deux étoiles. Car le nombre des points simples équivalents aux points énumérés est exprimé par $\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + (n-2) + 2 + 1$ ou $\frac{n(n+3)}{2}$. Donc la courbe déterminée par les points énumérés est nécessairement une courbe sectrice, dont AB est un axe de symétrie, et l'on trouve sans peine le point A′ qui entre dans sa génération en courbe sectrice.

Le point multiple A de l'ordre $n - 1$ comptant pour $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles ordinaires de la courbe C^n, cette courbe est de la classe $n(n-1) - (n-1)(n-2)$ ou $2(n-1)$, comme d'ailleurs toute courbe unicursale d'ordre n, qui n'a point de points multiples à tangentes coïncidentes. Par chacun des points cycliques passent donc $2(n-1)$ tangentes de la courbe. Mais la droite qui joint le point A′ à un des points cycliques coupant la courbe en n points, qui coïncident avec ce point, cette droite compte pour n des $2(n-1)$ tangentes en ce point. Donc le point A′ est un foyer principal multiple de l'ordre n de la courbe sectrice. En

(*) Pour les figures citées dans cet article le lecteur est prié de se reporter à la planche publiée dans le numéro précédent, p. 197.

outre, cette courbe admet $n - 2$ foyers simples qui se rangent en couples symétriques par rapport à AA′, du moins s'ils ne se trouvent pas sur cette droite.

L'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance $\overline{AB}^2$ sur la courbe sectrice, déterminée comme je l'ai indiqué, n'offre pas de difficulté. On obtient une courbe C^{n-1} passant par B, dont A est un point multiple de l'ordre $n - 2$ et AB un axe de symétrie. Cette courbe ne passe plus par les points cycliques. L'étoile mutilée des droites passant par A, qui indiquent les directions asymptotiques de C^n, est l'étoile mutilée des tangentes en A à la transformée C^{n-1}; et, réciproquement, l'étoile mutilée des tangentes en A à C^n, est l'étoile mutilée des droites passant par A, qui indiquent les directions asymptotiques de C^{n-1}. Enfin la courbe C^{n-1} a un foyer multiple de l'ordre $n - 2$, savoir le point qui correspond au point A′, et $n - 2$ foyers simples, qui sont les points correspondant aux foyers simples de C^n.

L'hypothèse $n = 1$ donne la droite de l'infini; l'hypothèse $n = 2$ conduit à une courbe sectrice, qui mérite le nom de *courbe bissectrice* et qui est la circonférence de cercle dont A est le centre et AA′ le rayon. Je commence donc l'étude des cas particuliers par la supposition $n = 3$. L'application des résultats généraux à ce cas particulier fait trouver pour la *courbe trisectrice*, ou plus simplement la *trisectrice* tout court, la cubique circulaire à point double A, qui est tout à fait déterminée par les conditions suivantes : il faut qu'elle soit symétrique par rapport à la droite AA′ et que ses tangentes au point double A forment, de part et d'autre, des angles de 60° avec cet axe de symétrie. Cette courbe qui coupe perpendiculairement l'axe de symétrie en un point B, qui est le point symétrique du milieu de AA′ par rapport à A′, doit posséder trois points d'inflexion, parce qu'elle a un point double. Ces trois points d'inflexion, ce sont les points cycliques et le point commun à toutes les perpendiculaires sur AA′. Car suivant le résultat général, les trois points d'intersection de la trisectrice avec sa tangente en chacun des points cycliques coïncident avec le point cyclique correspondant. Et le seul point symétrique de lui-même par

rapport à l'axe AA', qui ne se trouve pas sur cet axe, est point d'inflexion par raison de symétrie. D'ailleurs, les trois points d'inflexion sont situés sur une droite, etc.

Comme je l'ai indiqué ailleurs (*), la trisectrice a été déduite du cercle par M. Godefroy au moyen de la transformation dite de Maclaurin. C'est à cet architecte qu'elle doit son nom de trisectrice et que je dois la démonstration analytique de sa propriété sectrice en partant de sa déduction du cercle. Dans ce petit travail je remplacerai cette démonstration analytique par la démonstration géométrique suivante:

Dans le cas particulier de la transformation de Maclaurin, dont l'application à un cercle C (*fig.* 2) mène à une trisectrice, on fixe un point O sur la circonférence et l'on trouve le point de la trisectrice qui correspond à un point quelconque P de C comme étant le point d'intersection P' de la perpendiculaire PQ abaissée de P sur le diamètre OB du point fixe O et de la droite AP' menée parallèlement au rayon vecteur OP de P, par le milieu A du rayon OM. Mais quand MA' est égal à AM et que la perpendiculaire en M sur OB coupe AP' en D, on a A'D = A'P'. Car, si E est le point de OP qui se projette en A sur OB, on trouve DM = EA = PP', ce qui prouve que le quadrilatère MDPP' est un parallélogramme. Et, dans ce cas, la perpendiculaire sur DP' en son point milieu N, droite qui est parallèle à PB, passe par le milieu A' de MB, parce que le milieu N de DP' est en même temps le milieu de MP. Donc A'P' = A'D = AD, d'où l'on déduit immédiatement que l'angle P'A'B est égal à trois fois l'angle P'AB (**).

La trisectrice a un foyer triple au point A'. De plus, elle possède un foyer simple situé sur AA'. La position de ce foyer F se trouve géométriquement en appliquant à la tri-

---

(*) Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes (*Archives Néerlandaises*, t. XX).

(**) Je dois à M. G. de Longchamps la bienveillante communication que la trisectrice a été retrouvée par M. Joao d'Almeida Lima, primeiro tenente de artilheria, dans une étude *Sobre uma curva do terceiro grao*, publiée dans le *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* du Dr F. Gomer Teixeira (Coimbra 1885, vol. VI, n° 1, p. 13).

L'auteur portugais se sert de l'analyse pour parvenir au résultat désiré.

sectrice la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance AB^2, ce qui mène à l'hyperbole dont AB représente, en grandeur et en position, l'axe transverse droite qui fait des angles de 60° avec les asymptotes. En effet, le foyer de l'hyperbole situé du côté de B se transformant en A', l'autre foyer F_h de l'hyperbole se transforme en F: on a donc $FA = 2\,AB$, parce que $F_h A = \frac{1}{2} AB$.

La courbe qu'on obtient dans le cas $n = 4$ est représentée (*fig. 3*). Je ferai remarquer seulement qu'elle a des singularités d'ordre supérieur, parce que les tangentes aux points cycliques ont un contact du troisième ordre avec la courbe.

5. — Cas $n' = n - 1$.

Dans ce cas les courbes sectrices se rapportent à la division d'un angle en un nombre fractionnel $\frac{n}{n-1}$ de parties, excepté dans la supposition $n = 2$ et $n' = 1$, qui a été examinée dans l'article précédent; donc les courbes sectrices nouvelles du cas qui nous occupe, ne sont que des courbes sectrices impropres.

Les courbes sectrices du nouveau groupe sont de l'ordre $2(n - 1)$. Chacune de ces courbes $C^{2(n-1)}$ est déterminée par ses quatre points doubles avec leurs tangentes réelles et son point B. Car en ajoutant une unité à la somme des expressions $\frac{3n(n-1)}{2}$, $n - 1$ et $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 2$ on trouve le nombre $(n - 1)(2n + 1)$ des conditions smples qui déterminent une courbe de cet ordre. Et la classe des courbes est égale à leur ordre, simplement parce que $2(n-1)(2n-3) - (n-1)(n-2) - 2\{(n-1)(n-2) + (n-2)\} - (n-2)(n-3) = 2(n-1)$. Mais la droite qui joint A' à un des points cycliques comptant pour n des tangentes de la courbe, qui passent par ce point, la courbe admet $n - 2$ tangentes passant par ce point et la touchant ailleurs. Donc chaque courbe sectrice $C^{2(n-1)}$ possède un foyer multiple A' de l'ordre n et $n - 2$ foyers simples situés sur AA' ou symétriquement par rapport à cette droite.

L'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance AA'^2 mène à une courbe C^{n-1} dont A' est un point multiple d'ordre $n - 2$. Cette courbe C^{n-1} ne passe, non plus, ni par A, ni par les points cycliques. Mais A en est un foyer de l'ordre $n - 2$. Car chacune des deux droites qui joignent le point A à un point cyclique, coupe C^{n-1} en $n - 1$ points coïncidants, parce que les $n - 1$ tangentes de la courbe $C^{2(n-1)}$, en ce point cyclique, coïncident.

J'étudie maintenant le cas $n = 3$ et je remarque tout de suite que dans ce cas la courbe sectrice, qui mérite le nom de ***sesquisectrice***, est une courbe C^4 du quatrième ordre, qui a des points de rebroussement aux points cycliques et un point double au point A ; c'est donc un limaçon de Pascal. Les tangentes à cette courbe (*fig. 4*) au point double A forment des angles de 60° avec l'axe de symétrie AA'B et l'on a $AB = 3AA'$. Le foyer triple A' est le point d'intersection réel des deux tangentes de rebroussement. Et la courbe possède un foyer simple F situé sur AA' à une distance AF de A égale à $\frac{3}{4}$ AA'. Car la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance AA'. AB ou $3AA'^2$ donne une hyperbole, dont A' et B sont les sommets réels et dont A est un des foyers. Donc l'autre foyer F_h se trouve à une distance AF_h de A qui est égale à 4AA'. Et dans ce cas la distance du point correspondant F est $\frac{3}{4}$ AA'.

Il est bien simple de déduire la propriété indiquée du limaçon de sa construction connue au moyen d'un cercle C sur les rayons vecteurs AP du point A duquel on prend de part et d'autre du point P des segments égaux PP' et PP''. Car pour le limaçon en question ce segment est égal au rayon du cercle.

On a donc $P'A'B = PAB + A'P'P = PAB + \frac{1}{2} A'PA = \frac{3}{2} PAB$. Et l'angle $P''A'P'$ étant droit on a encore $P''A'B + \pi = \frac{3}{2}(P''AB + \pi)$, etc.

La courbe qu'on obtient dans le cas $n = 4$ est représentée (*fig.* 5).

(A suivre.)

SUR UNE TRANSFORMATION POLAIRE

DES COURBES ET DES SURFACES

Par M. **H. Le Pont.**

(*Suite*, voir p. 207.)

---

3. — Ce dernier théorème va nous permettre de construire la tangente au point m d'une courbe plane (γ) transformée d'une courbe plane (Γ) connaissant la tangente à cette courbe (Γ) au point M correspondant au point m.

Soient, en effet, H le point d'intersection de la tangente à (Γ) en M et de la tangente à (γ) en m; h la projection orthogonale du point H sur le rayon vecteur MOm. Au point O, menons la perpendiculaire à ce rayon qui rencontre MH en P et mH en p. Nous aurons, d'après un théorème bien connu,

$$\frac{e}{Op} + \frac{C}{OP} = 0.$$

$$\frac{Op}{OP} = -\frac{c}{C}$$

et par suite

$$\frac{OM}{Om} \times \frac{hm}{hM} = -\frac{C}{c}.$$

Le point m est donc sur la sphère principale.

De là, la construction suivante :

On mène le plan tangent à la sphère principale en un de ses points d'intersection h avec le rayon vecteur OM on joint le point H où ce plan rencontre la tangente en M à la courbe considérée au point m, correspondant aux points M, O et h; la droite mH ainsi obtenue est la tangente en m à la transformée de la courbe.

De même, étant donné le plan tangent en un point M d'une surface, on mène les plans tangents à la sphère principale en ses points d'intersection avec le rayon vecteur OM; le plan tangent à la transformée de la surface en l'un des points correspondants du point M passe par l'intersection du plan tangent en ce point à la surface avec le plan tangent à la sphère principale au point conjugué du pôle, du point M et du point correspondant considéré.

D'après ce qui précède, on obtient immédiatement la tangente à la transformée d'une courbe gauche connaissant la tangente en un point de la courbe.

4. — Toutes les propriétés descriptives d'une figure subsistent dans la transformée, à la condition de remplacer les lignes droites par les arcs de conique correspondants, les portions de plan par les segments de surface correspondants, etc.

Quant aux propriétés métriques, la loi de réciprocité est donnée par la formule

$$\frac{MM'}{mm'} = \frac{C^2}{c^2}\frac{\delta}{\Delta}\frac{Mh}{hm}\frac{h'M'}{h'm'},$$

m et m' étant les points correspondants aux points M et M', Δ et δ les longueurs des perpendiculaires abaissées du pôle sur les droites MM' et mm', h et h' les points d'intersection de la sphère principale avec les rayons Mm et M'm', h et h' étant conjugués des points M, O, m et M', O, m'. Cette formule s'écrira encore

$$\frac{T}{t} = \frac{C^2}{c^2}\frac{hM}{hm}\frac{h'M'}{h'm'},$$

en appellant T et t les aires des triangles MOM' et mOm', ou encore

$$\frac{T}{t} = \frac{C^2}{c^2}\frac{\Theta}{\theta},$$

Θ et θ désignant les aires des triangles formés par l'origine et les points $\frac{R}{C}$, $\frac{R'}{C}$ et $\frac{r}{c}$, $\frac{r'}{c}$.

On a donc

$$\frac{hM}{hm}\frac{h'M'}{h'm'} = \frac{\Theta}{\theta}.$$

SUR LES COURBES PARALLÈLES

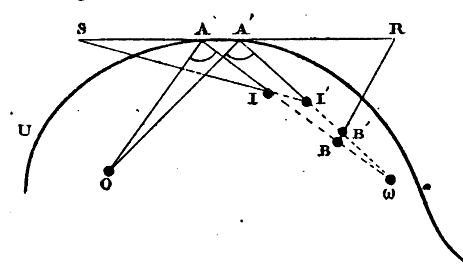
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. G. de Longchamps.

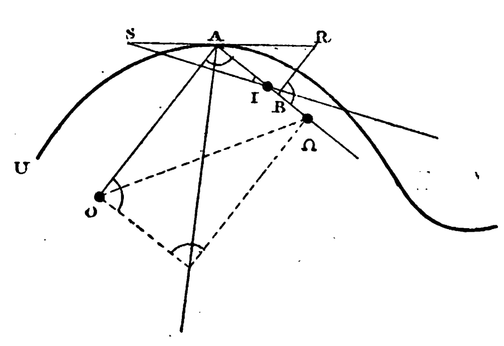
(*Suite*, voir p. 199).

18. — Voici encore une transformation des courbes planes dans laquelle on peut appliquer l'idée des transversales réciproques au tracé des tangentes.

Imaginons une courbe U et un point fixe O; par O, on mène un rayon vecteur OA et sur la droite $A\omega$, perpendiculaire à AO on prend $AI = h$, h étant constant Le lieu décrit par I est une certaine courbe V et nous nous proposons de tracer la tangente à V, au point I.



A cet effet, prenons un rayon vecteur infiniment voisin OA′ et soit I′ le point correspondant. Les deux droites AI, A′I′ se coupent en un certain point ω; prenons $\omega B = \omega B' = h$. Dans le triangle $\omega AA'$, les deux droites II′, BB′ sont deux transversales réciproques; elles coupent donc AA′ en deux points R S symétriques par rapport au milieu de AA′.

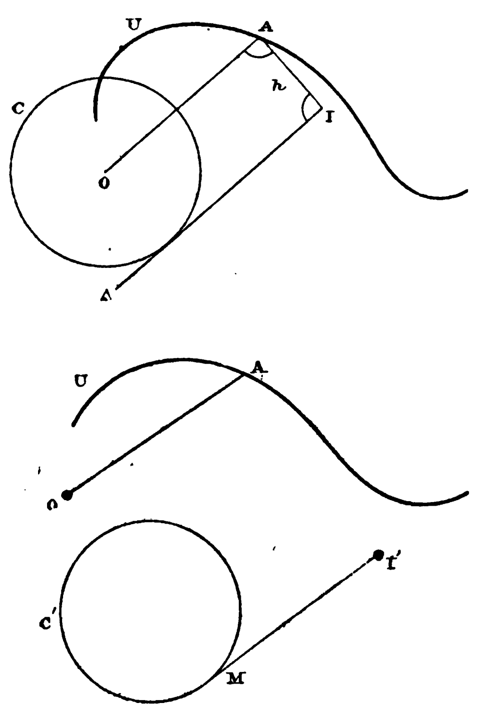


Si nous passons à la limite, la droite II′ devient la tangente

cherchée; le point ω a une position limite Ω facile à déterminer en observant que la perpendiculaire élevée au milieu de AA′ partage $O\omega$ en deux parties égales. D'après cette remarque, il suffit de mener, comme l'indique la figure 1, une droite passant par O et partagée en deux parties égales par la normale à U, au point A, et par AI. Ayant pris $\Omega B = h$, on élève BR′ perpendiculaire à $A\Omega$ et l'on prend $AS' = BR'$; la droite S′I est la tangente demandée.

On voit que la construction indiquée s'applique, avec les modifications convenables, au cas où l'on suppose que l'angle OAI est constant, mais quelconque.

19. — Nous ferons aussi observer que la transformation précédente peut être envisagée à un point de vue différent, en apparence du moins, de celui auquel nous nous sommes placé. Menons, en effet, par I, une droite Δ parallèle à OA; Δ enveloppe un cercle de centre O et de rayon h. On peut d'ailleurs remplacer, pour plus de généralité, le cercle C par un cercle quelconque C′ et transformer la courbe U de la manière suivante: soit O un point fixe, OA un rayon vecteur; au cercle C′, on mène une semi-tangente M′I égale et



parallèle à OA; le lieu du point I' est une courbe V que l'on peut construire tangente par tangente par le procédé indiqué plus haut.

20. — L'équation générale des courbes V peut s'obtenir très aisément. Soit

$$\rho = f(\omega)$$

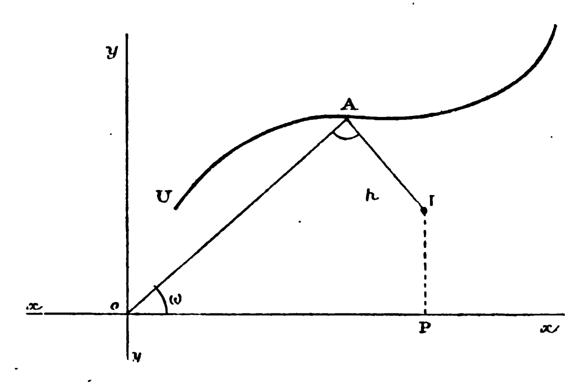
l'équation de U. Désignons par x, y les coordonnées du point I par rapport à deux axes rectangulaires quelconques, passant par le point O. En projetant le contour formé par ces coordonnées, successivement, sur OA et sur OI, nous avons

$$x \cos \omega + y \sin \omega = f(\omega)$$

et

$$x \sin \omega - y \cos \omega = h.$$

On peut résoudre ces deux équations par rapport à x et



à y et construire la courbe V au moyen des relations :

$$x = \sin \omega \, . \, f(\omega) - h \cos \omega,$$

$$y = \cos \omega \, . \, f(\omega) + h \sin \omega.$$

Dans ces formules, ω désigne un paramètre arbitraire.

Lorsque $f(\omega)$ est une fonction rationnelle de $\sin \omega$ et de $\cos \omega$, ces égalités prouvent que la courbe V est unicursale, propriété que la construction proposée pour le point I rend évidente, *a priori*.

21. — Le cas très simple où la courbe V est remplacée par une droite Δ, que l'on peut supposer être parrallèle à ox, donne lieu à un résultat intéressant.

En désignant par h' la distance du point O à Δ, la courbe V est représentée par l'équation

$$x^2 = \frac{(h^2 + h'y - y^2)^2}{(h + h' - y)(h - h' + y)}.$$

C'est une quartique unicursale ayant deux points doubles situés sur yy' et un troisième point double rejeté à l'infini, dans la direction xx'. L'un des points doubles situés sur yy' est toujours un nœud; l'autre est un point double isolé. La forme de cette courbe est rendue évidente par l'équation précédente et l'on voit qu'elle est constituée par deux branches hyperboliques aplaties de seconde espèce, se croisant sur yy', au nœud que nous avons signalé.

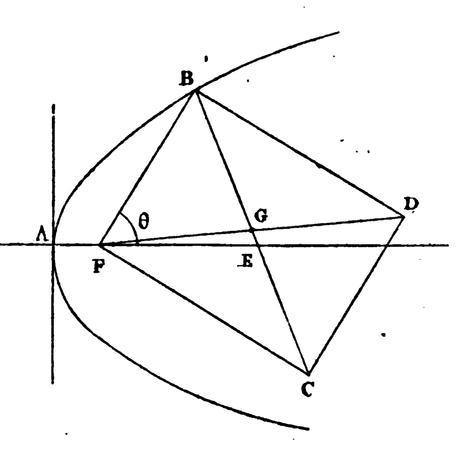
(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. CATALAN.

Votre *trisectrice* m'a fait songer à un vieux problème que j'ai resolu, peut-être bien, en 1832. En voici l'énoncé, tel que je le retrouve sur un papier *jauni par l'âge:*

Sur le rayon vecteur FB *d'une parabole, et avec la normale comme diagonale, on construit un rectangle* FBDC. *Trouver le lieu du point* D.



(Il est clair que ce lieu est l'*antipodaire de la parabole;* ce que j'ignorais dans ce temps-là).

1° D'après une propriété connue, le triangle BFE est isoscèle.

Donc FBE $= \frac{1}{2}(\pi - \theta.)$

2° D'après la construction, le triangle BGF est isoscèle. Donc FB $= \theta - \omega$, ω désignant l'angle DFE.

Conséquemment,

$$\pi - \theta = 2(\theta - \omega);$$

puis

$$\theta - \omega = \frac{\pi - \omega}{3},$$

ou

$$\text{BFD} = \frac{1}{3}\,\text{AFD}.$$

Connaissez-vous cette propriété *trisectrice* de la parabole?

Nota. — Je répondrai à M. Catalan que je n'ai pas souvenir d'avoir observé l'intéressante propriété qu'il me signale. Mais la lettre de mon maître et vieil ami soulève un exercice qui, au point de vue du calcul, présente quelque intérêt, ainsi que le prouveront, je pense, les développements suivants.

Soit AFD l'angle que nous voulons partager en trois parties égales. Prenons sur FA un point A, arbitrairement; puis, considérons la parabole qui a pour foyer F et pour sommet A. En prenant deux rayons vecteurs tels que FB, infiniment voisins, nous reconnaissons immédiatement que le lieu décrit par le point D se confond avec l'enveloppe des droites BD. Ainsi, et comme le remarque M. Catalan, le lieu du point D est l'antipodaire, ou, comme l'on dit aussi, la première podaire négative de la parabole, par rapport au foyer. On sait que cette courbe est une cubique; proposons-nous d'établir, par le calcul, l'identité de la courbe décrite par le point D avec l'enveloppe des droites BD.

Cherchons d'abord l'enveloppe des droites BD

Puisque

$$\text{FB} = \frac{p}{1 - \cos\theta},$$

l'équation de BD est

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{p}{1 - \cos \theta}. \qquad (1)$$

Prenons la dérivée de cette équation, par rapport à θ; nous avons

$$y \cos \theta - x \sin \theta = \frac{-p \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}. \qquad (2)$$

L'enveloppe des droites BD s'obtiendra en éliminant θ entre les équations (1) et (2); mais ce calcul présente certaines difficultés, s'il n'est pas dirigé comme nous allons l'indiquer.

Les équations (1) et (2) permettant d'exprimer x et y en fonction de $\sin \theta$ et de $\cos \theta$, nous reconnaissons ainsi que la courbe cherchée est unicursale. Il est donc naturel d'exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre variable arbitraire. A cet effet, multiplions (1) et (2) respectivement par *cos* θ et — *sin* θ, puis ajoutons, nous avons

$$x = p\,\frac{1 + 2 \cos \theta}{1 - \cos \theta},$$

ou

$$\cos \theta = \frac{x - p}{2p + x}, \qquad (3)$$

D'autre part, si nous faisons la somme des carrés des égalités (1) et (2), nous obtenons

$$x^2 + y^2 = p^2 \left\{ \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{1 + \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^3} \right\},$$

ou

$$2p^2 = (x^2 + y^2)(1 - \cos \theta)^3. \qquad (4)$$

Les égalités (3) et (4) donnent, finalement,

$$2\,(2p + x)^3 = 27p\,(x^2 + y^2). \qquad (A)$$

La courbe qui correspond à cette équation est facile à construire en observant que celle-ci peut s'écrire

$$27py^2 = (x - 4p)^2(2x + p).$$

Sous cette forme, on voit que cette équation représente une parabole cubique, à folium, ayant un nœud au point dont les coordonnées sont $(4p, 0)$.

Cherchons maintenant le lieu du point D.

Le triangle rectangle fBD donne

$$fB = fD \cos(\theta - \omega),$$

ou

$$\frac{p}{1 - \cos\theta} = \rho \cos(\theta - \omega).$$

Mais, comme le remarque M. Catalan, le triangle isoscèle fGB donne

$$\theta = \frac{\pi + 2\omega}{3}.$$

Ainsi le lieu du point D, en coordonnées polaires, est représenté par l'équation

$$\frac{p}{\rho} = \cos\frac{\pi - \omega}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi + 2\omega}{3}\right). \qquad \text{(B)}$$

Pour montrer l'identité des courbes qui correspondent aux équations (A) et (B), il est naturel de convertir cette dernière en coordonnées cartésiennes. Mais cette transformation exige encore un certain effort de calcul qu'on peut sensiblement abréger en posant

$$\omega + \Omega = \pi.$$

L'équation (B) devient alors

$$\frac{p}{\rho} = \cos\frac{\Omega}{3}\left(1 + \cos\frac{2\Omega}{3}\right)$$

ou

$$\frac{p}{\rho} = 2\cos^3\frac{\Omega}{3}.$$

La relation connue

$$\cos\Omega = 4\cos^3\frac{\Omega}{3} - 3\cos\frac{\Omega}{3}.$$

donne d'abord

$$\cos\Omega = \frac{2p}{\rho} - 3\cos\frac{\Omega}{3},$$

puis, finalement,

$$2(2p + x)^3 = 27\,py^2.$$

Ainsi se trouve établie par l'analyse l'identité des deux lieux géométriques que nous avons considérés et cette cubique, antipodaire de la parabole par rapport au foyer, peut résoudre le problème de la trisection de l'angle, comme l'observe M. Catalan.

En effet, si nous imaginons que cette courbe ait été construite, en plaçant suivant AFD l'angle que l'on veut partager en trois parties égales, le folium de la courbe détermine le point D et le point B s'obtient alors en cherchant l'intersection du cercle décrit sur FD comme diamètre avec la tangente en D à la cubique considérée.

Mais cette construction, qu'il est peut-être possible de simplifier, est moins élégante que celle qui résulte de la trisectrice de Mac-Laurin.

ECOLE POLYTECHNIQUE (*)

CONCOURS DE 1885

Trigonométrie. — On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 46751{,}36;\ b = 58047{,}29;\ c = 37694{,}06.$$

Déterminer les trois angles et la surface en hectares.

Géométrie descriptive. — Un cercle de 0m10 de diamètre, situé dans le plan de front P, se projette horizontalement sur une parallèle au petit côté et à 0m11 du bas de la feuille. Son centre se projette verticalement sur la ligne qui divise la feuille en deux parties égales dans le sens de sa longueur, à 0m28 du bas. On le prend comme cercle générateur de 2 tores pleins ayant pour axes les tangentes à la circonférence en son point le plus à gauche et en son point le plus haut. 1° On tracera complètement l'intersection des deux surfaces, en indiquant les constructions effectuées pour en obtenir un point quelconque et la tangente en ce point. 2° On représentera par ses projections le solide commun aux deux tores en retranchant la partie de ce solide située en arrière d'un plan de front placé lui-même à 0m02 en arrière du plan P.

Lavis. — Faire à l'encre de Chine et à teintes plates le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères.

La surface du solide sera supposée dépolie.

On ne passera pas de teinte sur le fond.

Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver.

Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.

(*) Voyez la première question (*Journal*, p. 159).

QUESTIONS D'EXAMENS

30. — *Appliquer l'équation aux carrés des différences à la séparation des racines d'une équation donnée* f (x) = o.

Soit F (x) = o l'équation aux carrés des différences et soit λ une limite inférieure des racines positives de F = o ; la suite

$$0, \quad \sqrt{\lambda}, \quad 2\sqrt{\lambda}, \ldots$$

ne peut pas renfermer deux racines de $f = 0$; cette suite sépare donc les racines de l'équation proposée.

31. — *Construire la courbe* U *qui correspond à l'équation*

$$(y - x^2)^2 = x^7.$$

U se compose de deux bras paraboliques dont la concavité est tournée vers l'axe yy' ; il y a, à l'origine, un point de rebroussement de seconde espèce. Le bras parabolique inférieur avant de couper OX présente un point limite et un point d'inflexion qui sont déterminés respectivement par les équations

$$x^3 = \frac{16}{49}, \quad x^3 = \left(\frac{8}{35}\right)^2.$$

32. — *Exprimer qu'un point* M_0 *est le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques données.*

Soient

$$f(x,y,z) = 0, \qquad \varphi(x,y,z) = 0,$$

les équations des deux coniques données ; désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0, les tangentes issues de ce point à la première conique sont représentées par l'équation

$$4f(x,y,z)\,f(x_0,y_0,z_0) - (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0})^2 = 0. \quad (1)$$

De même, l'équation

$$4\varphi(x,y,z)\,\varphi(x_0,y_0,z_0) - (x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0})^2 = 0, \quad (2)$$

représente les deux tangentes issues de M_0 à la seconde conique.

En identifiant (1) et (2) on a pour déterminer les *deux* inconnues (x_0, y_0) *cinq* relations et on peut se demander d'où provient cette surabondance d'équations.

A cet effet, il faut observer : 1° que les équations (1) et (2) représentent l'une et l'autre un système de deux droites ; 2° que ces coniques applaties ont le même centre, savoir le point M_0.

Dans ces conditions, il suffit d'écrire qu'elles possèdent, en dehors du centre, deux autres points communs, pour qu'elles représentent la même courbe. *Deux* équations suffisent donc pour identifier (1) et (2) ; et l'on voit ainsi, *à priori*, que les *cinq* équations obtenues par identification des égalités (1) et (2) rentrent les unes dans les autres et se réduisent à deux.

33. — *En désignant par* α, β, γ, *les trois racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = o,$$

calculer la quantité U,

$$U = \Sigma\alpha\beta^3.$$

On a, en explicitant U,

$$U = \alpha\beta^3 + \alpha\gamma^3 + \beta\alpha^3 + \beta\gamma^3 + \gamma\alpha^3 + \gamma\beta^3,$$

ou bien

$$U = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4.$$

En observant que

$$\alpha + \beta + \gamma = o,$$

on trouve

$$U = -\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$$

ou enfin

$$U = -2p^2.$$

34. — *Vérifier que le terme tout connu de l'équation aux carrés des différences relative à l'équation du quatrième degré, est, négatif : si deux racines de cette dernière équation sont imaginaires, et positif si les quatre racines sont imaginaires.*

Dans le premier cas, les racines peuvent être représentées par a, b, $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$; a, b, α, β étant réels ; dans l'autre cas, par $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$; $\gamma + \delta i$, $\gamma - \delta i$. De cette remarque,

et de la composition connue du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, résulte immédiatement la proposition énoncée.

QUESTION 98

Solution par M. Giat, élève en Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis; classe de M. Ed. Lucas.

On considère une parabole fixe et un cercle de rayon constant, mais variable de position. On suppose que le cercle se déplace dans le plan sous la condition que dans chacune de ses positions le cercle mobile et la parabole fixeraient un système de tangentes communes rectangulaires. On propose de trouver et d'étudier le lieu que décrit le centre du cercle quand il occupe dans le plan toutes les positions compatibles avec la condition donnée.

(E. B.)

Soient O le pied de la directrice sur l'axe, M le point d'intersection de deux tangentes rectangulaires à la parabole et C le centre du cercle correspondant.

Le point M est sur la directrice et la distance MC est égale à $r\sqrt{2}$, r désignant le rayon du cercle.

Si nous joignons le point M au foyer F de la parabole et si par ce même point nous menons une parallèle MA à l'axe, la droite MC est bissectrice de l'angle FMA.

Ceci posé, prenons pour axes de coordonnées la directrice et l'axe de la parabole. Soient $OM = \lambda$, $\widehat{FMC} = \alpha$ et x, y les coordonnées du point C,

On a

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y - \lambda}{\sin\varphi} = r\sqrt{2}, \tag{1}$$

et l'angle φ est égal à $\pi - \alpha$.

Mais le triangle rectangle MOF donne

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\lambda}{p}.$$

Donc

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\lambda}{p}. \qquad (2)$$

En éliminant λ et φ entre les équations (1) et (2) nous aurons le lieu du point C. L'équation (2) peut s'écrire

$$2p \sin\varphi \cos\varphi + \lambda(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

ou, en tenant compte des équations (1),

$$2px(y - \lambda) + \lambda[x^2 - (y - \lambda)^2] = 0.$$

D'où l'on déduit

$$x^2 - (y - \lambda)^2 = -\frac{2px\,(y - \lambda)}{\lambda}. \qquad (3)$$

D'autre part, les équations (1) donnent

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = 2r^2. \qquad (4)$$

D'où, en ajoutant membre à membre,

$$x^2 = r^2 - \frac{px\,(y - \lambda)}{\lambda}.$$

Ce qui donne

$$\lambda = \frac{pxy}{r^2 - x^2 + px}.$$

En remplaçant λ par cette valeur dans (4) on obtient après simplifications

$$y^2(r^2 - x^2)^2 = (2r^2 - x^2)(r^2 - x^2 + px)^2. \qquad (5)$$

Telle est l'équation du lieu. C'est une courbe du sixième degré symétrique par rapport à l'axe des x et comprise entre les deux droites $x = r\sqrt{2}$, $x = -r\sqrt{2}$.

Asymptotes. — Les droites $r = x$, $r = -x$ sont des asymptotes doubles. En annulant l'ensemble des termes du sixième degré on a

$$x^4(x^2 + y^2) = 0.$$

Donc il n'y a pas d'autres asymptotes réelles.

Points de rencontre de la courbe avec l'axe des x. — 1° Les deux points dont l'ordonnée est nulle et qui ont pour abscisse: $x = r\sqrt{2}$, $x = -r\sqrt{2}$.

2° La valeur de x correspondant aux racines de l'équation (6) $x^2 - px - r^2 = 0$. Ces racines sont réelles, mais pour que les branches de courbe qui passent par ces points soient réelles, il faut qu'elles soient comprises entre $+ r\sqrt{2}$ et

$-r\sqrt{2}$. Substituons $r\sqrt{2}$, nous obtenons $r(r - p\sqrt{2})$, En substituant $-r\sqrt{2}$ nous obtenons $r(r + p\sqrt{2})$ qui est positif. En substituant $-r$ on obtient $+pr$ qui est positif. La racine négative de l'équation (6) doit donc être comprise entre $-r$ et o. L'autre est comprise entre $r\sqrt{2}$ et r.

1er Cas. — $r - p\sqrt{2} > 0$. — Aux deux racines de l'équation (6) correspondent des branches réelles. Les points obtenus sont des points doubles. La construction de la courbe est facile.

Voici le tableau de la discussion :

x	$-r\sqrt{2}$	$-r$	x_1	r	x_2	$r\sqrt{2}$
y^2	0	∞	0	∞	0	0

2e Cas. — $r = p\sqrt{2}$. — La racine positive de l'équation (6) est égale à $r\sqrt{2}$. On a donc un point de rebroussement au point le plus à droite de la courbe (*fig.* 2).

3e Cas. — $r < p\sqrt{2}$. — La racine positive de l'équation (6) donne un point double isolé car elle est plus grande que $r\sqrt{2}$.

Nota. — Cette question a été également résolue par MM. Perin et Marchis.

QUESTIONS PROPOSÉES

176. — Soient AB et A'B' deux cordes normales à une parabole et rectangulaires. On construit un point M dont les coordonnées sont respectivement égales à AB et A'B'. Trouver le lieu décrit par M quand le point A parcourt la parabole donnée.

Ce lieu est une courbe du huitième ordre, unicursale; elle correspond, en coordonnées polaires à l'équation

$$\rho = \frac{2p}{\sin^2 2\omega};$$

p désignant le paramètre de la parabole. *(G. L.)*

177. — De combien de manières peut-on ranger $2n$ nombres inégaux deux à deux, sur deux lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas?

(Ed. Lucas.)

178. — De combien de manières peut-on ranger $3n$ nombres inégaux deux à deux, sur trois lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas?

(Ed. Lucas.)

179. — On sait que le roi, aux échecs, ne peut se déplacer à chaque coup qu'en occupant l'une des huit cases voisines qui l'entourent; cela posé, démontrer que les nombres des trajets différents que le roi peut effectuer sur un échiquier indéfini, pour se rendre d'une case donnée à une autre case donnée *par le nombre minimum de coups*, sont respectivement égaux aux coefficients du développement des puissances successives du trinôme

$$x^2 + x + 1.$$ *(Ed. Lucas.)*

180. — On donne l'équation d'une surface à laquelle on peut mener K normales d'un point quelconque. Indiquer comment on trouvera le lieu du point M tel que la somme des carrés de ces normales soit égale à l^2.

Si M est un point du lieu et G le centre des moyennes distances des pieds des normales menées du point M, faire voir que la droite MG est normale, au point M, à la surface lieu des points M.

Faire le calcul pour la surface représentée par l'équation

$$y^2 + mz^2 = 2px,$$

et montrer que dans ce cas la surface, lieu des points M, est du second ordre. *(E. Amigues.)*

181. — On considère une ellipse E; par les foyers F, F'

on mène deux rayons vecteurs mobiles, parallèles, et dirigés dans le même sens. Ces droites rencontrent E aux points A, A′; par A on trace une droite perpendiculaire à FA′ et rencontrant celle-ci au point I. Trouver le lieu décrit par ce point distinguer les différentes formes affectées par les courbes, lieu de I.

RECTIFICATIONS

Pages 106 et 107, lisez $\operatorname{tg}\Phi = \frac{\sin A \sin B}{\sin C + \sin B \cos A}$ ou $\operatorname{tg}\Phi = \frac{\sin B}{2c \quad a\cos B}$.

Pages 106, 107 et 124, les dénominateurs des expressions p_1, p_2, p_3, p_a p_b, p_c doivent être remplacés par a_1^3, b_1^3, c_1^3; a_1, b_1, c_1 désignant les *médianes* du triangle.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22674-5.

SUR LES POINTS ASSOCIÉS DU PLAN
D'UN TRIANGLE ABC

Par **M. Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 217.)

Théorème VII. — *Si l'on considère le cercle de Brocard et les coniques associées, cercle et coniques que nous désignerons par* C, C_a, C_b, C_c; *que l'on appelle* D′ *le pôle de la droite qui joint les points de Brocard par rapport au cercle de Brocard* (le point D′ étudié par ce géomètre a pour coordonnées homogènes a^3, b^3, c^3), D'_a, D'_b, D'_c *les associés de* D′

C *et* C_a *ont pour cordes communes* BC *et* AD'_a
C *et* C_b — — CA *et* BD'_b
C *et* C_c — — AB *et* CD'_c

Le théorème se démontre très simplement en partant de la forme élégante que M. Brocard a donnée à l'équation de son cercle

$$abc(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\beta\gamma.$$

Remarque. — Si α, β, γ sont les coordonnées homogènes d'un point o il est facile de voir que l'on a: ABC étant le triangle de référence

$$Co^2 = \frac{a^2b^2}{(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos C)$$

$$Co_c^2 = \frac{a^2b^2}{(a\alpha + b\beta - c\gamma)^2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos C).$$

Si le point α, β, γ appartient au lieu défini par l'équation

$$\frac{ab(\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos C)}{(a\alpha + b\beta)^2 - c^2\gamma^2} = \pm K^2$$

qui, CB étant pris pour un des x
CA — — y

représente les deux circonférences

$$x^2 + 2\,xy\cos C + y^2 - K^2(2\,ay + 2\,bx - ab) = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2\,xy \cos C + y^2 + K^2(2\,ay + 2\,bx - ab) = 0 \quad (2)$$

on aura évidemment :

$$Co \,.\, Co_c = abK^2.$$

Donc :

Si O parcourt soit la circonférence (1), *soit la circonférence* (2), O_c *parcourra soit la circonférence* (1), *soit la circonférence* (2).

La première a pour centre le point dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{K^2c}{\sin^2 C}\cos A$$

$$y = \frac{K^2c}{\sin^2 C}\cos B$$

et pour carré du rayon

$$4K^2R \,.\, \frac{K^2Rc - S}{c},$$

la seconde a pour centre le point symétrique par rapport à C du centre de la première, et le carré de son rayon est :

$$4K^2R\,\frac{K^2Rc + S}{c},$$

R, S représentant le rayon du cercle circonscrit à ABC et la surface de ce triangle.

Remarquons :

1° Que la circonférence (1) n'est réelle que si l'on a

$$K^2 > \frac{h_c}{2R} \quad (h_c \text{ est la hauteur partant de C});$$

si $K^2 = \frac{h_c}{2R}$, elle se réduit au point de concours des hauteurs et la circonférence (2) a pour rayon $h_c\sqrt{2}$ et pour centre le point symétrique par rapport à C du point de concours des hauteurs;

2° Les centres des deux circonférences sont *toujours* sur la hauteur partant de C ;

3° La circonférence (2) est toujours réelle ;

4° Les circonférences (1) et (2) ont pour axe radical la ligne qui joint les milieux des côtés CA, CB.

Si l'on considère la circonférence

$$a\alpha^2 \cos A + b\beta^2 \cos B + c\gamma^2 \cos C = 0,$$

dont le centre est le point de concours des hauteurs de ABC *et*

dont le carré du rayon est : — $4R^2 \cos A \cos B \cos C$ *et si l'on prend un point* O *de cette circonférence les points associés* O_a, O_b, O_c *appartiennent aussi à cette circonférence.*

C'est un cas particulier du théorème suivant qui est évident.

Théorème VIII. — *Si* $\varphi(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$ *est l'équation de la courbe décrite par le point* O *les points associés de* O *décriront la même courbe et réciproquement : si une courbe est telle que les associés de tous ses points se trouvent sur elle-même, la courbe a une équation de la forme* $\varphi(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$.

Le cas particulier de ce théorème que nous venons de signaler peut s'énoncer ainsi :

Théorème IX. — *Soit* H *le point de concours d'un triangle* ABC *qui a un angle obtus, la circonférence qui a pour centre le point* H *et qui coupe orthogonalement les trois circonférences décrites sur les côtés de* ABC *comme diamètres, est telle que l'un quelconque de ses points a ses associés sur elle-même ; c'est la seule circonférence du plan qui jouisse de cette propriété.*

Les quelques pages qui précèdent n'ont pas la prétention d'être une étude complète sur les *points associés* et sur les transformations par *points associés*, j'ai voulu seulement montrer l'intérêt que l'étude de ces points pouvait avoir pour généraliser ou étendre certaines propriétés se rapportant au triangle.

Je pense aussi qu'il doit y avoir pour le tétraèdre quelque chose d'analogue aux points associés ; mais l'extension au tétraèdre des propriétés du triangle n'est pas aisée à faire et je n'ai pas eu le loisir de m'en occuper. La question semble, du reste, un peu à l'ordre du jour. — Mémoire de M. J. Neuberg sur le tétraèdre; divers articles des *Nouvelles Annales*, des *Archives* de Grunert, etc... ; aussi, à propos du tétraèdre équifacial (tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux voir Congrès de Nantes, page 173), dans ses analogies avec le triangle équilatéral, je veux citer la proposition suivante qui, malgré son *excessive simplicité* ne me paraît pas avoir été signalée dans les divers articles sur ce tétraèdre (Dostor, Neuberg, etc.).

La somme des distances d'un point quelconque de l'espace aux quatre faces d'un tétraèdre équifacial est constante. Elle se rapporte à notre étude en ce que, dans le tétraèdre, les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles aux distances de ce point aux faces du tétraèdre.

SUR LES COURBES SECTRICES (*)

Par M. **Schoute**, professeur à l'Université de Groningue.

(*Suite*, voir p. 219.)

6. Théorème II. — *Le lieu du point* P, *qui forme avec la base fixe* AA' *un triangle* APA' (fig. 6) *dans lequel l'angle* A' *est dans un rapport commensurable constant* $\frac{n}{n'}$ *à l'angle* A *est une courbe* $C^{n+n'-1}$ *symétrique par rapport à la base* AA', *qui passe* $n - 1$ *fois par* A, n' *fois par les deux antipoints de* A *et* A', *c'est-à-dire par les foyers imaginaires des coniques dont* A *et* A' *sont les foyers réels et* $n' - 1$ *fois par* A'. *En ajoutant successivement la base aux* $n - 1$ *tangentes de la courbe en* A, *aux* $n' - 1$ *tangentes de la courbe en* A' *et aux parallèles aux* $n + n' - 1$ *asymptotes de la courbe menées par un point quelconque de la base, on obtient une étoile respectivement à* n, *à* n' *et à* $n + n'$ *rayons. Enfin en chacun des antipoints de* A *et* A' *les* n' *tangentes coïncident avec la droite qui joint ce point au point* A' *et sur chacune de ces tangentes cet antipoint compte pour* n *des points d'intersection de la tangente et de la courbe.*

Ce théorème, qui forme le pendant du théorème précédent n'est au fond qu'une conséquence immédiate des résultats généraux qui se rapportent au cas des étoiles, tournantes dans des sens contraires. Il se déduit du théorème précédent au moyen d'une transformation bien simple. Car si P (*fig. 7*) est un point de la courbe $C^{n+n'-1}$ du premier théorème, le point d'intersection P' de AP et de la droite symétrique de A'P par rapport à AA' sera un point de la courbe $C^{n+n'-1}$

(*) Voir les figures relatives à cet article, p. 197.

du second théorème. Mais il estévident que les deux bissectrices $A'A$ et $A'A''$ de l'angle $PA'P'$ séparent harmoniquement les côtés de cet angle. Donc P' est sur AP le point conjugué harmonique de P par rapport à A et à la droite $A'A''$, c'est-à-dire que l'application de l'homologie involutive à centre A et à axe $A'A''$, sur la courbe $C^{n+n'-1}$ du théorème premier transforme cette courbe dans la courbe $C^{n+n'-1}$ du théorème second.

Le rapport homologique, qui existe entre les deux courbes $C^{n+n'-1}$, que je viens d'indiquer, ne montre pas directement la situation des points infiniment éloignés de la courbe nouvelle, ces points ne correspondant pas à eux-mêmes. Mais tandis que d'un côté cet inconvénient n'est pas grave, parce que la position des points infinis de la nouvelle courbe était déjà indiquée par la théorie générale (art. 2); de l'autre côté, ce rapport nous fait connaître dans les deux courbes la position remarquable des points d'intersection de ces courbes avec la droite qui représente le lieu des points équidistants de A et A'. Car cette droite correspondant à la droite à l'infini coupe la première courbe en $n + n' - 1$ points réels situés sur les droites menées par A parallèlement aux asymptotes de la seconde courbe et la seconde courbe en deux points multiples d'ordre n' (les antipoints de A et A') et en $n - n' - 1$ points réels, situés sur les parallèles aux asymptotes de la première courbe par A.

Je n'entre pas dans les particularités par rapport aux courbes sectrices ressortant de ce second théorème, parce qu'elles ne passent pas par les points cycliques et ne sont donc pas aussi simples que les courbes sectrices correspondantes au théorème premier. Seulement, j'observe que le cas $n = 2$, $n' = 1$ fait trouver une hyperbole dont A est un des sommets, dont le centre M se trouve sur AA' à une distance AM de A égale à $\frac{1}{3} AA'$, et dont les asymptotes font des angles de 60° avec l'axe transverse.

7. — Pour terminer, je signale deux problèmes, qui se rattachent à la théorie des courbes sectrices au moyen d'une

transformation simple. Dans le premier problème il s'agit du lieu du point P_1 *(fig. 8)*, qui forme avec la base fixe AA′ un triangle AP_1A' dans lequel le complément de l'angle A′ est dans un rapport commensurable constant $\frac{n}{n'}$ à l'angle A; tandis que le second problème s'occupe du lieu du point P_1' *(fig. 9)* qui forme avec la base fixe AA′ un triangle AP_1A' dans lequel l'excès de l'angle A′ sur $\frac{\pi}{2}$ est dans un rapport commensurable $\frac{n}{n'}$ à l'angle A. D'où l'on voit tout de suite que le lieu du premier problème se déduit de la courbe $C^{n+n'-1}$ du premier théorème, comme le lieu du second problème de la courbe $C^{n+n'-1}$ du second théorème, au moyen de la transformation des points P, P_1 ou P′, P_1' situés sur une même droite passant par A et de telle sorte qu'ils limitent un segment de cette droite, vu du point A′ sous un angle droit.

Mon attention a été fixée sur la transformation que je viens de mentionner par M. G. de Longchamps, qui l'a étudiée principalement par l'analyse dans son « Étude sur une transformation réciproque » (*). Elle appartient aux transformations quadratiques involutives, qui comme je l'ai prouvé ailleurs (**) se divisent en deux groupes, les

(*) Voir ce journal (1882, p. 49).

(**) Voir mon étude « Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes » *(l. c.)*.

Je profite de l'occasion pour témoigner mon regret qu'avant la publication de mon travail je n'ai pas eu connaissance des deux mémoires « *Étude sur une transformation réciproque* (*Journal*, 1882, p. 49) » et « *Sur les Conchoïdales* » (Nouv. corresp. Math., t. V), de M. G. de Longchamps. Le premier s'occupe d'un cas particulier de l'involution quadratique irrégulière, celui des points conjugués par rapport à un cercle réduit à un point (c'est-à-dire aux deux droites isotropes passant par ce point) qui sont en ligne droite avec un point donné. Ce cas se caractérise par la coïncidence de deux points fondamentaux, qui se présente toujours dans l'involution quadratrique irrégulière, quand la conique dominante dégénère en deux droites; il forme, dans cette involution irrégulière, le pendant du cas particulier de l'involution régulière que j'ai détaillé dans mon étude. Et le second donne une construction extrêmement élégante de la tangente à quelques courbes classiques de manière qu'il s'occupe du même sujet que mon étude citée.

involutions quadratiques régulières des points conjugués par rapport aux coniques d'un faisceau Γ^2 et les involutions quadratiques irrégulières des points conjugués par rapport à une conique C^2 et situés en ligne droite avec un point donné. Et tandis que des trois points fondamentaux deux coïncident dans l'involution quadratique régulière quand deux des quatre points de base du faisceau Γ^2 coïncident dans une direction déterminée, cette même coïncidence de deux des trois points fondamentaux se présentera dans l'involution quadratique irrégulière, aussitôt que la conique donnée C^2 des points qui se correspondent à eux-mêmes, a un point double. Donc, la propriété de la transformation en question, que les droites qui joignent les couples de points correspondants passent par un même point A, la range dans le groupe des involutions quadratiques irrégulières. Et, en effet, elle représente de ce groupe le cas particulier où deux points fondamentaux coïncident, parce qu'elle est la correspondance des points, qui sont en ligne droite avec A et qui sont conjugués par rapport au cercle infiniment petit à centre A_1. Le triangle fondamental de cette involution est donc la limite d'un triangle isoscèle ayant pour sommet A, pour base $A'A''$, l'angle au sommet diminuant indéfiniment jusqu'à zéro.

Je n'entre pas dans plus de détails par rapport à l'application de la transformation indiquée aux courbes des deux théorèmes, parce que les problèmes nouveaux peuvent être résolus sans peine au moyen des résultats généraux de l'article 2. Je remarque seulement qu'en effet la transformation indiquée fait trouver une courbe $C^{n+n'}$ quand n' est impair et une courbe $C^{n+n'-1}$ quand n' est pair, comme l'exige cette théorie générale. Car, selon que n' est impair ou pair la courbe $C^{n+n'-1}$ de nos deux théorèmes peut être représentée par les symboles connus

$$C^{n+n'-1}\,(A^{n-1},\ A'^{n'-1},\ A'^{0}_{1}),$$

ou

$$C^{n+n'-1}\,(A^{n-1},\ A'^{n'-1},\ A'^{1}_{1}),$$

où A'_1 indique le point infiniment voisin de A' sur $A'A''$; parce que, pour n' impair, aucun et, pour n' pair, un seul des

rayons de l'étoile mutilée des tangentes de cette courbe coïncide avec A'A'. Dans les deux cas, la courbe correspondante est donc caractérisée par le symbole

$$C^{2(n+n'-1)}\ (A^{n+n'-1},\ A'^{n+n'-1},\ A'_1{}^{n+n'-1}).$$

Mais dans le cas où n' est impair, cette courbe contient, comme partie impropre, la droite $A'A'_1$ comptée $(n - 1)$ fois et la droite AA'_1 comptée $(n' - 1)$ fois; de manière qu'il ne reste qu'une partie essentielle

$$C^{n+n'}\ (A^n,\ A'^{n'},\ A'_1).$$

Et dans le cas où n' est pair, cette courbe contient, comme partie impropre, la droite $A'A'_1$ comptée $(n - 1)$ fois, la droite AA'_1 comptée $(n - 1)$ fois et encore la droite AA' comptée une fois; de manière que la partie essentielle est symbolisée par

$$C^{n+n'-1}\ (A^{n-1},\ A'^{n'-1},\ A'_1).$$

Ainsi que je l'ai remarqué, ces résultats sont confirmés par la théorie générale. Car si n' est pair, n est impair et, dans ce cas, l'hypothèse $\varphi = \frac{\pi}{2}$ fait coïncider les deux droites AP et A'P avec la droite AA', etc.

La conique des points, qui se correspondent à eux-mêmes dans la transformation dont je me suis servi, se réduisant à un cercle infiniment petit A', c'est-à-dire aux deux droites isotropes passant par ce point, les points cycliques et les antipoints de A et A' correspondent à eux-mêmes dans cette transformation. Donc les courbes nouvelles, qui donnent la solution des deux problèmes posés dans cet article, se comportent de la même manière par rapport à ces points remarquables.

Mais si l'on observe que les courbes $C^{n+n'-1}$, qui donnent la solution des deux problèmes dans le cas où n' est pair, s'accordent avec les courbes correspondantes quant à la nature de tous leurs points remarquables, cette question seprésente: ces courbes ne coïncident-elles pas avec les courbes correspondantes? Et c'est ce qui arrive en effet. Car, dans ce cas, les n' points d'intersection d'une de ces courbes avec un rayon vecteur quelconque par A, qui ne coïncident pas avec A, sont

les points d'intersection de cette droite avec une étoile à centre A', dont le nombre n' des rayons est pair, de manière qu'elle se compose de $\frac{n'}{2}$ couples de droites rectangulaires. Et cela prouve que, pour n' pair, les courbes des deux théorèmes sont des courbes anallagmatiques dans la transformation. Ainsi pour $n = 3$, $n' = 2$ le limaçon donne également la solution du premier problème de l'article présent (*). En vérité, on a (*fig. 4*) $\widehat{P''A'A''} = \widehat{P'A'B}$. De même, si n est pair les courbes des deux théorèmes sont des courbes anallagmatiques dans la transformation que l'on obtient par l'échange mutuel des points A et A' dans la transformation des figures 8 et 9. Ainsi pour $n = 4$, $n' = 3$ la courbe de la figure 5 est une anallagmatique dans cette nouvelle transformation.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 226).

22. — Prenons deux courbes U et V; par un point fixe O, menons un rayon vecteur rencontrant U en A, V en B; puis, sur la perpendiculaire élevée au point B au rayon vecteur, prenons BI = OA. Lorsque le rayon vecteur considéré tourne autour de O, le point I décrit une certaine courbe W; nous nous proposons de construire la tangente à W, au point I.

(*) Voir le mémoire cité de M. G. de Longchamps « *Étude sur une transformation réciproque* », à la fin de l'article 10.

J'observe que le corollaire I de l'article 22 peut donner lieu à des malentendus. Car il est évident que la courbe qui correspond à une courbe donnée de l'ordre m peut abaisser son ordre bien au-dessous de $(2m - 3)$. Même jusqu'à l'unité, pourvu que l'on ait la faculté de faire passer la courbe donnée autant de fois que l'on désire par les points fondamentaux. Donc l'auteur s'est borné dans son corollaire à des courbes C^m, qui n'ont pas de points multiples aux pôles A et A' de la transformation.

A cet effet, imaginons (*fig. I*) un rayon vecteur OA'B', infiniment voisin de OAB, et soit I' le point qui correspond à I, sur W. Si nous prenons

$$\omega J = BI = OA, \quad \omega J' = B'I' = OA',$$

nous pourrons observer : 1° que JJ' et II' sont deux transversales réciproques du triangle ωBB', 2° que les deux triangles OAA', ωJJ' sont égaux.

Après cette double remarque, si nous passons à la limite, le point ω a pour position limite (*fig, II*) un certain point Ω, facile à déterminer; c'est, comme nous l'avons déjà observé, le point diamétralement opposé au point O, dans le cercle qui passe: 1° par O, 2° par B, tangentiellement à lacourbe U. Par conséquent, si nous faisons l'angle β égal à l'angle α et si nous prenons aussi BR' = BR, IR' est la tangente demandée.

23. — Dans le cas particulier où l'on remplace les courbes U et V par deux droites parallèles, le lieu décrit par le point I est une droite; si l'on prend pour U une circonférence, pour V l'un de ses diamètres Δ, le point O étant d'ailleurs placé sur la circonférence, le lieu du point I est une cubique circulaire qui devient une strophoïde oblique en supposant que O appartient au diamètre perpendiculaire à Δ. Cette dernière remarque permettrait de construire très simplement la tangente aux cubiques circulaires s'il n'existait pas, pour ces courbes, une construction, également basée sur les transversales réciproques, et plus simple encore. Dans cette construction on considère les cubiques circulaires comme des conchoïdales de cercle (*).

24. — Une autre transformation, tout à fait analogue à la précédente, peut se déduire encore de la figure fixe constituée par deux courbes U, V et un point O (*fig. III*).

Par O, menons un rayon vecteur mobile OAB et, sur la perpendiculaire élevée à OAB au point B, prenons BI = AB. Le point I décrit une courbe W à laquelle nous voulons mener la tangente, au point I.

(*) Voyez, sur ce sujet, *Cours de mathématiques spéciales*; SUPPLÉMENT, p. 113.

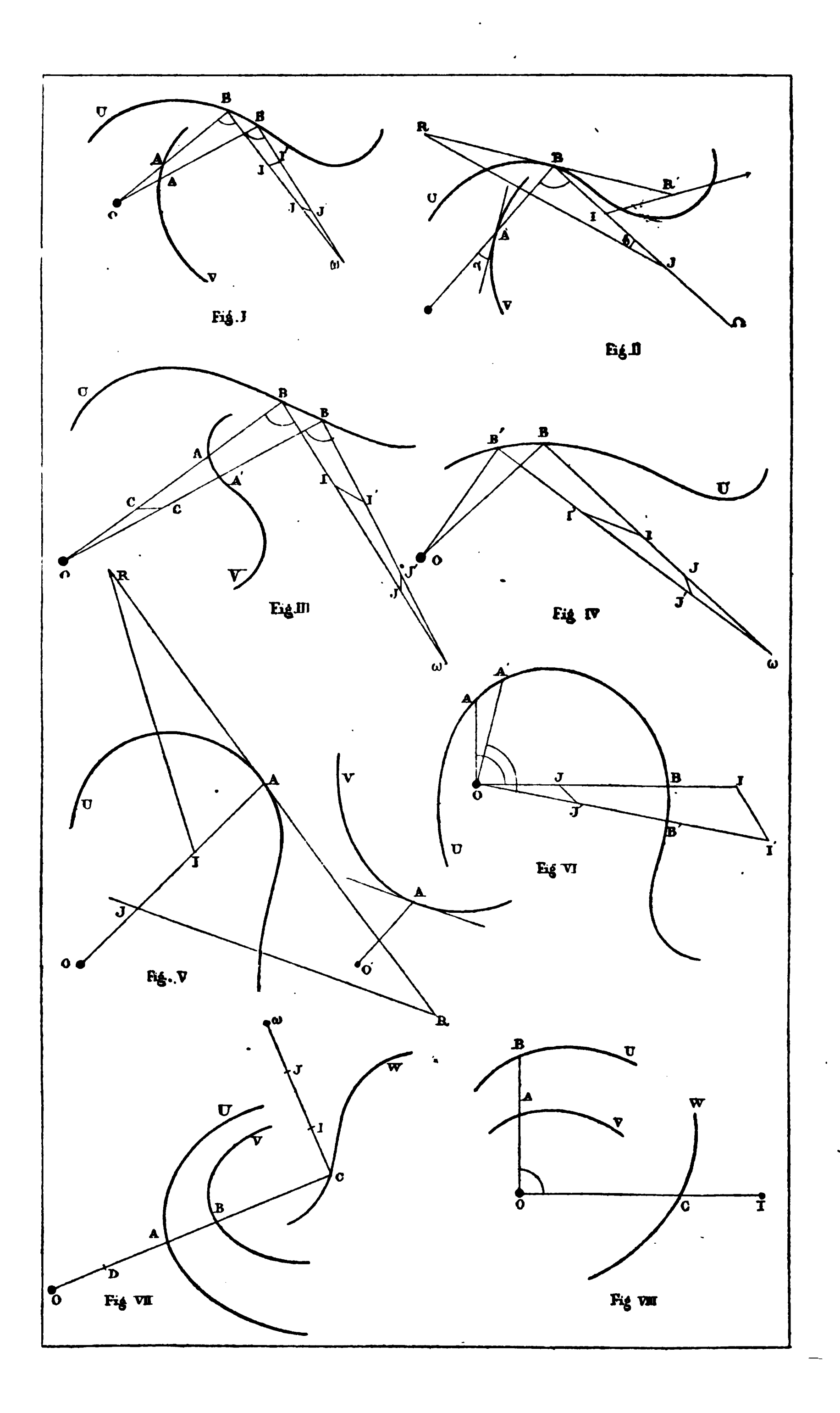


Fig. I

Fig. II

Fig. III

Fig. IV

Fig. V

Fig. VI

Fig. VII

Fig. VIII

Soit

$$OC = AB = IB = \omega J, \quad OC' = A'B' = I'B' = \omega J'.$$

Les deux triangles OCC′, ωJJ′ sont égaux; CC′ et AA′ sont deux transversales réciproques, dans le triangle OBB′; II′, JJ′ sont aussi deux transversales réciproques, dans le triangle ωBB′. D'après ces diverses remarques, on voit comment, à la limite on pourra fixer : 1° la détermination de CC′, 2° celle de JJ′, 3° finalement, celle de la tangente cherchée II′.

25. — La construction précédente est en défaut quand la courbe V disparaît et vient se confondre avec le point O, pôle de la transformation. Dans ce cas, la construction proposée se réduit à la suivante : on a *(fig. IV)* une courbe U et un point fixe O; par O, on mène un rayon yecteur mobile OB et, sur la droite BI perpendiculaire à OB, on prend BI = BO; construire la tangente à la courbe W, lieu du point I.

En considérant, comme l'indique la figure, deux positions infiniment voisines du rayon vecteur et les points correspondants I, I′ situés sur W, on voit qu'en prenant

$$\omega J = IB = OB, \quad \omega J' = I'B' = OB'$$

les triangles ωJJ′, OBB′ sont égaux et que les droites JJ′, II′ sont deux transversales réciproques du triangle ωBB′. On déduit de là une construction très simple pour la droite limite de II′ c'est-à-dire pour la tangente demandée.

26. — Considérons maintenant *(fig. V)* deux courbes U, V et deux pôles fixes O, O′; par ces points, on mène deux rayons vecteurs parallèles OA, O′A′ et l'on prend AI = A′O′; nous voulons déterminer le tracé de la tangente à la courbe W lieu du point I, quand nous supposons que les rayons vecteurs considérés sont mobiles autour des pôles.

Sans répéter un raisonnement avec lequel nous supposons le lecteur familiarisé par les exemples qui précèdent, on voit qu'en prenant

$$OJ = IA = O'A',$$

et en menant JR parallèle à la tangente en A′ à la courbe V, la tangente cherchée est la droite IR′ qui joint le point considéré I au point R′ symétrique de R, par rapport au point A.

27. — On résout encore, par un procédé analogue à ceux que nous venons d'exposer, le problème plus général qui correspond à l'énoncé suivant.

Soient (*fig. VII*) U, V, W trois courbes quelconques; par un point fixe O, on mène un rayon vecteur mobile OABC et l'on prend sur la droite CI, perpendiculaire au rayon vecteur, CI = AB ; construire la tangente à la courbe, lieu du point I.

Ayant déterminé le point ω, comme il a été dit plus haut, on prend

$$\omega J = IC = OD = AB.$$

Le théorème des transversales réciproques détermine alors : 1° la tangente au lieu décrit par D et, par suite, la tangente au lieu décrit par J ; 2° de la connaissance de la tangente en J (par une application nouvelle du même théorème) on déduit la tangente cherchée au lieu décrit par le point I, en un point pris sur cette courbe.

28. — Cette génération des courbes, aussi bien que celles que nous avons envisagées dans les paragraphes précédents, donne lieu à de nombreuses applications particulières, en prenant, au lieu des courbes générales que nous avons considérées, des courbes particulières, ou même des droites. On peut aussi, pour créer ces applications, supposer que certaines des courbes U, V, W disparaissent ou deviennent coïncidentes.

Par exemple, supposons que dans la génération précédente W se confonde avec V, puis que U et V soient remplacées par deux droites parallèles, le lieu de I est une droite.

Si W se confond avec V et si l'on suppose : 1° que V soit un cercle Γ passant par O, 2° que U soit un diamètre de Γ, perpendiculaire à celui qui passe par O, le lieu de I est une strophoïde oblique, etc.

29. — Considérons encore cette transformation que nous généraliserons dans le paragraphe suivant.

Soit (*fig. VI*) U une courbe quelconque; autour d'un point fixe O, on fait tourner un angle droit AOB et, sur le prolongement de OB, on prend BI = OA; on propose de tracer, au point I, la tangente à la courbe que décrit ce point.

Considérons une position infiniment voisine du système mobile proposé et prenons

$$OJ = BI = OA, \quad \text{puis } OJ' = B'I' = OA'.$$

Nous pouvons alors observer :

1° Que les deux triangles OAA', OJJ' sont égaux;

2° Que les droites JJ' et BB' sont deux transversales réciproques du triangle OII'.

De là nous concluons, par une construction analogue à celles que nous avons indiquées tout à l'heure, le tracé de la tangente demandée.

30. — Voici maintenant la généralisation annoncée; nous nous bornons à l'indiquer, car, en appliquant les idées précédentes, on trouvera sans peine la construction demandée.

Soient *(fig. VIII)* U, V, W trois courbes quelconques; autour d'un point fixe O on fait tourner un angle droit. L'un des côtés de cet angle rencontre les deux premières courbes aux points A et B; l'autre côté rencontre la troisième au point C. Cela posé, on prend, sur le prolongement de OC, la longueur CI égale à AB; trouver la tangente en I au lieu décrit par ce point. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMENS

35.— *On considère un triangle* ABC *et une droite* Δ *passant par* A; *sur* Δ, *à partir du point* A *on prend de part et d'autre deux points* M, M' *mobiles, équidistants de* A. *Les droites* BM, CM' *se coupent en un certain point* I, *dont on demande le lieu géométrique.*

Les points M et M' décrivent sur Δ deux divisions homographiques; le lieu cherché est donc (th. de Chasles) une conique passant par les points B et C. On voit aussi, *à priori*, qu'elle passe par le point A et qu'elle admet pour direction asymptotiques : 1° la droite Δ; 2° la droite qui joint A au milieu A' de BC.

La question traitée par le calcul donne les mêmes résultats,

très simplement. En désignant par O le point commun à BC et à Δ; et en prenant Δ pour axe des y, BC pour axe des x, après avoir posé

$$OA = h, \quad OB = a, \quad OC = b,$$

on trouve, pour l'équation du lieu décrit par I,

$$2h(a - x)(b - y) = y(2ab - ax - by).$$

D'après ce résultat, une première asymptote est une parallèle à Δ menée par le point O' conjugué harmonique de O, relativement au segment BC. Les deux asymptotes d'une hyperbole étant deux transversales réciproques par rapport à un triangle inscrit quelconque ABC, on construit la seconde asymptote en prenant O'', symétrique de O' par rapport à A', et en menant par ce point une parallèle à la médiane AA'.

36. — *Deux points quelconques pris dans le plan d'une conique* F *et les points de contact des tangentes issues de ces points sont six points appartenant à une même conique.*

Soit P un point; PA, PB les tangentes à F issues de P. Prenons PAB pour triangle de référence, et soit, dans la notation abrégée

$$\gamma^2 + K\alpha\beta = 0, \tag{1}$$

l'équation de Γ.

Prenons un point Q $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$; la polaire de Q a pour équation

$$\gamma\gamma_0 + \frac{K}{2}(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) = 0.$$

La conique aplatie constituée par cette polaire et par AB est représentée par

$$\gamma^2\gamma_0 + \frac{K\gamma}{2}(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$\alpha\beta\gamma_0 - \frac{\gamma}{2}(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) = 0.$$

Cette équation étant visiblement vérifiée par $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, la proposition est établie.

Il est vrai que les axes que nous avons adoptés peuvent, dans certains cas, être imaginaires; mais on sait que cette objection n'ôte rien à la rigueur des démonstrations faites avec un pareil système d'axes.

37. — ***Lieu décrit par l'orthocentre du triangle formé par le centre de l'ellipse et deux points*** **P, Q, *conjugués sur la courbe.***

Les coordonnées de P étant représentées par $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$; celles de Q, d'après les formules de Chasles, sont : $-a \sin \varphi$, et $b \cos \varphi$.

En prenant les équations des hauteurs du triangle POQ, on trouve que les coordonnées de l'orthocentre sont x, y :

$$(\mathrm{H}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{c^2}{a} \sin \varphi \cos \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi) \\ y &= -\frac{c^2}{b} \sin \varphi \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi). \end{aligned} \right.$$

Comme on peut toujours poser

$$\sin \varphi = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

les formules (H) prouvent que la courbe est une unicursale du sixième ordre. On peut aussi éliminer φ entre les deux équations (H) et l'on trouve

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = c^4(b^2y^2 - a^2x^2)^2.$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme d'une rosace constituée par quatre foliums se réunissant au point O. Les tangentes en ce point sont les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés du losange obtenu en joignant consécutivement les sommets de l'ellipse.

On peut aussi déterminer les tangentes parallèles aux axes, lesquelles, sauf erreur, sont à une distance de O égale à $\pm \frac{c^2}{3b\sqrt{3}}$, pour celles qui sont parallèles à Ox ; et à une distance égale à $\pm \frac{c^2}{3a\sqrt{3}}$, si l'on considère les tangentes parallèles à Oy. *(A suivre).*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. B. Hanumenta Rau, *professeur à l'École normale de Madras.*

... La solution de la question 359 donnée dans le ***Journal de Mathématiques spéciales*** (tome II, deuxième série, p. 126)

par M. P. Petit, me paraît incomplète parce que les deux équations $f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ peuvent avoir deux racines communes de la forme α et $\frac{1}{\alpha}$. Le facteur commun aux deux polynômes est alors de la forme $x^2 - mx + 1$.

Je prends la liberté, pour ce motif, de vous adresser une solution plus complète....

NOTA. — L'observation qu'on vient de lire est parfaitement fondée. Les deux polynômes proposés étaient :

$$ax^7 + bx^3 + c,$$

et

$$cx^7 + bx^4 + c.$$

On demandait quelle condition devaient vérifier les coefficients de ces deux polynômes pour qu'ils admettent un diviseur commun du second degré. M. Petit, dans la solution rappelée ci-dessus, n'a envisagé que le cas où le facteur était de la forme $x^2 - 1$; mais, comme l'observe avec raison M. Hanumenta, ce facteur peut être aussi de la forme $x^2 - mx + 1$.

Par des voies diverses, M. Hanumenta, dans une note qui accompagne sa lettre et que je regrette de ne pouvoir publier in-extenso, faute de place, trouve pour la valeur de m

$$m = \frac{bc}{ab - a^2 + c^2}.$$

On conclut de ce résultat que la condition cherchée est

$$b^2c^2(a^2 - c^2) = (ab + a^2 - c^2)(ab - a^2 + c^2).$$

Par exemple, les deux polynômes :

$$8x^7 - 377x^3 + 21,$$
$$21x^7 - 377x^4 + 8,$$

admettent un diviseur commun du deuxième degré, savoir

$$x^2 - 3x + 1.$$

G. L.

Extrait d'une lettre de M. BROCARD.

... Permettez-moi d'ajouter quelques remarques à celles de M. Catalan au sujet de la *trisectrice* de la parabole.

Cette courbe est une des premières qui aient été rencontrées par les géomètres dans l'étude des *caustiques*.

Elle est, en effet, la caustique par réflexion de la parabole pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe; et, à ce titre, elle a été déjà étudiée dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital, d'après MM. Barbier et Lucas, qui, dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. V, 1866, p. 27-31) en ont fait une description très détaillée.

Ce lieu géométrique répond à la question mathématique du concours d'admission à l'École Polytechnique en 1865, résolue *loc. cit.* p. 21-27.

Cette courbe appartient à la famille des *spirales sinussoïdes* caractérisées par l'équation générale

$$\rho^n = A \cos n\omega,$$

(*loc. cit.* Haton de la Goupillière, 1876, t. XV, p. 97-108) et appelées quelquefois aussi *orthogénides* (Allégret, *Ann. de l'École normale*; Ed. Lucas, *Nouvelles Corr. math.*, t. II, 1876, p. 223).

La bibliographie très complète et très intéressante de ces courbes remarquables a été donnée par M. Haton dans l'article cité...

QUESTION 105

Solution de M. E. Vessiot, élève du Lycée de Marseille.

Des surfaces du second ordre passent par une conique donnée et par deux points symétriques par rapport à son plan. Lieu de leurs centres.

Séparer ce lieu en nappes, correspondant aux divers genres de surfaces. (Amigues.)

Première partie. — Prenons pour plan des xy le plan de la conique. La droite qui joint les deux points fixes perce ce plan en un point P. Le diamètre de la conique passant en P sera l'axe des x; l'axe des y sera le diamètre conjugué; Oz sera une perpendiculaire au plan de la conique.

Nous supposerons d'ailleurs que la conique donnée soit une conique à centre.

Son équation dans le plan des xy est alors

$$x^2 + ay^2 = h.$$

L'équation générale des surfaces du second ordre passant par cette conique est donc

$$x^2 + ay^2 - h + 2z(\lambda x + \mu y + \nu z + \rho) = 0.$$

Soient d'ailleurs x_0 l'x du point P et z_0 la distance des points fixes au plan des xy. Si l'on fait dans l'équation de la conique $y = 0$, $x = x_0$, on obtient une équation en z dont les racines doivent être z_0 et $-z_0$. On en déduit la valeur de ν et de ρ

$$2\nu = \frac{h - x_0^2}{z_0^2}, \qquad \rho = -\lambda x_0.$$

De sorte que l'équation générale des surfaces de la famille est, λ et μ étant des paramètres variables :

$$x^2 + ay^2 + \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z^2 + 2\mu yz + 2\lambda zx - 2\lambda x_0 z - h = 0 \quad (1)$$

Pour avoir le lieu des centres il faudra éliminer λ et μ entre les trois dérivées partielles, qui sont :

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda z &= 0 \\ ay + \mu z &= 0 \\ \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z + \lambda(x - x_0) + \mu y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Le résultat est

$$x(x - x_0) + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z^2 = 0. \quad (3)$$

Le lieu est donc une surface du second ordre. Pour en discuter la nature il suffit de transporter l'origine en son centre, car ses axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Il faut faire $x = x' + \frac{x_0}{2}$. On a

$$x'^2 + ay - \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z^2 = \frac{x_0^2}{4}.$$

On en déduit sans peine le tableau suivant :

$a > 0$ la conique donnée est une ellipse	$h - x_0^2 > 0$ . . . . hyperboloïde à 1 nappe (P intérieur à l'ellipse) $h - x_0^2 < 0$ . . . . ellipsoïde (P extérieur)

$a < 0$ (hyperbole) $\begin{cases} h - x_0^2 > 0 \ldots \text{ hyperboloïde à 2 nappes} \\ \text{(P entre les 2 branches)} \\ h - x_0^2 < 0 \ldots \text{ hyperboloïde à 1 nappe} \\ \text{(P dans l'une des branches).} \end{cases}$

2e PARTIE. — Il faut discuter la surface dont l'équation est (1). Pour cela, groupons en carrés. En ordonnant successivement en x, y et z, on obtient facilement la forme suivante

$$a\alpha X^2 + \alpha Y^2 + Z^2 = H$$

avec les valeurs

$$\alpha = a\left(\frac{h - x_0^2}{z_0^2} - \lambda^2\right) - \mu^2$$

$$H = a(\lambda^2 x_0^2 + \alpha h).$$

Nous avons donc à nous occuper du signe de a, de α et de H. Le paromètre a dépend des données. Calculons α et H en fonction des coordonnées d'un point du lieu. Des équations (2) on tire

$$\lambda = -\frac{x}{z}, \qquad \mu = -\frac{ay}{z}.$$

Donc

$$\alpha = -\frac{a}{z^2}\left(x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}\right)z^2.$$

Ce qui nous donne une surface séparatrice

$$x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}z^2 = 0. \qquad (4)$$

C'est un cône, ayant son sommet à l'origine et homothétique du lieu. On pourra donc le remplacer par le plan de la courbe plane d'intersection située à distance finie. Ce plan est

$$x = 0.$$

— De même, on trouve

$$H = \frac{a^2}{z^2}\left[x^2x_0^2 - h\left(x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}z^2\right)\right].$$

La surface séparatrice est encore un cône

$$x^2x_0^2 - h\left(x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}z^2\right) = 0. \qquad (5)$$

Mais on peut encore le remplacer par deux plans. Multiplions en effet (3) par h et ajoutons membre à membre avec (5) et nous obtenons les deux plans

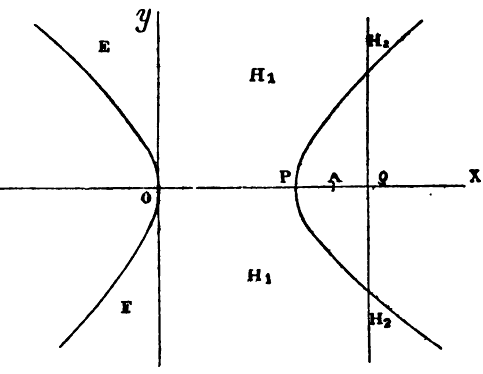
$$\left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ xx_0 = h. \end{array}\right.$$

Passons à l'examen des divers cas qui peuvent se présenter (les figures représentent les traces sur le plan des zx),

Premier cas : $a > 0$. — La conique donnée est une ellipse. A est le sommet situé sur Ox.

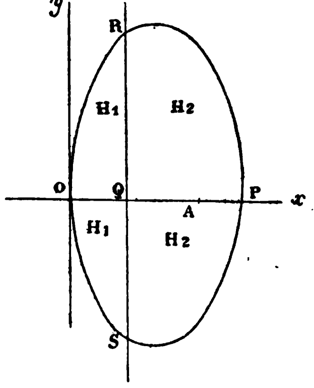
I. $h - x_0^2 > 0$.

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe passant en O et en P.



Les traces des plans séparateurs sont Oz, RQS pour le plan $xx_0 - h = 0$.

(Dans le cas qui nous occupe, Q est au delà de A.) Le premier coupe suivant deux droites, le second suivant une hyperbole.



α ne peut changer de signe qu'en s'annulant, c'est-à-dire quand on traverse la surface du cône (4). Or pour tous les points de Ox, qui sont évidemment à l'extérieur du cône, α est négatif. Il en résulte que pour tous les points du lieu dont l'abscisse est positive on a $\alpha < 0$, et pour les autres $a > 0$.

H est négatif pour tous les points extérieurs au cône (5), car il est négatif pour tous les points de Ox. Il sera donc

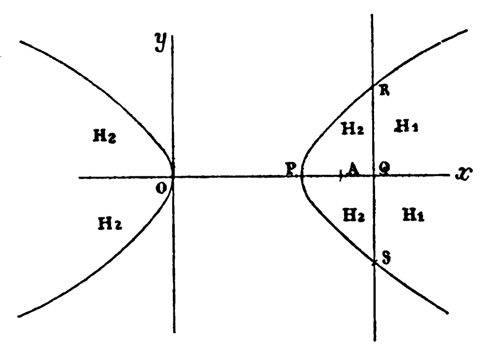
négatif pour tous les points du lieu situés entre les deux plans séparateurs et positif pour les autres.

De ces considérations il résulte qu'on a : des hyperboloïdes à deux nappes pour la nappe de la surface située à l'extrême droite, des hyperboloïdes à unenappe pour les points situés entre les deux plans, des ellipsoïdes à l'extrême gauche.

II. $h - x_0^2 < o$.

Le lieu est un ellipsoïde. Le plan $x = o$ ne sépare plus. L'autre plan seul sépare. Il est ici situé entre O et A. Car si on substitue O et $\sqrt{h}$ dans le premier membre de son équation

$$xx_0 - h = o.$$

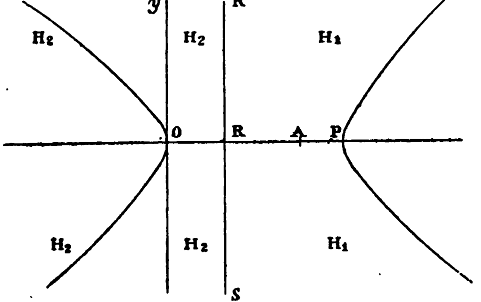


On a des résultats de signes contraires. α est toujours négatif. On ne peut pas avoir d'ellipsoïdes, ce qui était évident.

Le signe de H se discute d'après les principes déjà indiqués.

On a des hyperboloïdes à deux nappes à droite, des hyperboloïdes à une nappe à gauche.

Deuxième cas : a $<$ o. — La conique donnée est une hyperbole.



Soit d'abord

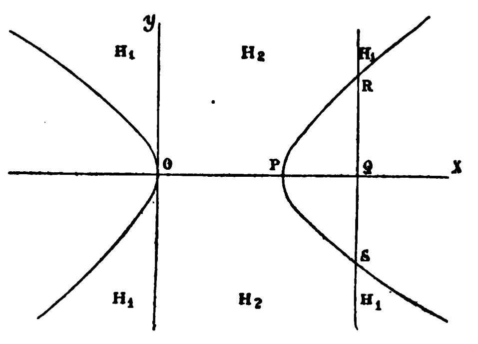
$$h > o;$$

Ox est alors l'axe transverse.

I. $h - x_0^2 > o$.

Le lieu est un hyperboloïde à deux nappes. Le plan $x = o$sépare les deux nappes. L'autre plan coupe la surface suivant une ellipse. Il coupe Ox au delà de A. La même méthode déjà

employée conduit aux résultats suivants : jamais d'ellipsoïdes, ce qui était évident; des hyperboloïdes à une nappe sur la partietronquée de la nappe de droite du lieu; des hyperboloïdes à deux nappes partout ailleurs. Le plan des zy ne sépare donc pas ici. Cela tient à ce que quand on le traverse, α et H changent de signe en même temps.



II. $h - x_0^2 < 0$.

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe. Le plan QRS est entre O et A. Il sépare seul, par la même raison qu'au paragraphe précédent.

On a encore des hyperboloïdes à une nappe, à droite ; et des hyperboloïdes à deux nappes, à gauche.

— Supposons enfin

$$h < 0.$$

Il en résulte qu'on a forcément

$$h - x_0 < 0.$$

Ox est l'axe non transverse de l'hyperbole donnée.

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe. Le plan séparateur RQS est en dehors de OP.

On n'a des hyperboloïdes à deux nappes que dans la partie comprise entre les deux plans séparateurs.

Remarque. — Dans le cas où le point P se trouverait sur la conique, c'est-à-dire où on aurait

$$h - x_0^2 = 0,$$

le lieu devient un cylindre, elliptique si $a > 0$, hyperbolique si $a < 0$.

La droite qui joint les deux points donnés a alors trois points communs avec la surface mobile et y est par conséquent contenue tout entière. Cette surface ne peut donc jamais être qu'un hyperboloïde à une nappe.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Rat, Bellando, à Marseille ; Marchis, à Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

182. — Soit H une hyperbole; une droite mobile tangente à H rencontre ses asymptotes en deux points A et B que l'on projette en A′ et B′ sur l'axe non transverse de la courbe; sur A′B′ comme diamètre on décrit un cercle Δ et l'on prend, par rapport à Δ, le pôle I de AB.

Trouver le lieu de I; ce lieu est l'axe transverse de H.

(G. L.)

183. — Sur une ellipse E, on considère un point mobile M. Abstraction faite de la normale en M, on peut, de ce point, mener à l'ellipse considérée trois autres normales. Prenons deux de ces droites MA, MB; les tangentes aux points A et B pieds de ces normales, se coupent en I. Démontrer que le lieu de I est une ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24766-5.

SUR QUELQUES COURBES REMARQUABLES

Par M. **Maurice d'Ocagne,** ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. — M. de Longchamps, dans un intéressant article de ce journal (*), a donné une construction de la tangente aux courbes ainsi définies :

Soient Ox et Oy deux axes rectangulaires, Δ une droite parallèle à Oy. Prenons une courbe U quelconque, et sur cette courbe un point B. Tirons OB qui coupe Δ en A. Par A menons une parallèle à Ox, par B une parallèle à Oy ; ces droites se coupent en I ; ce point I, lorsque le point B varie sur la courbe U, décrit une courbe V.

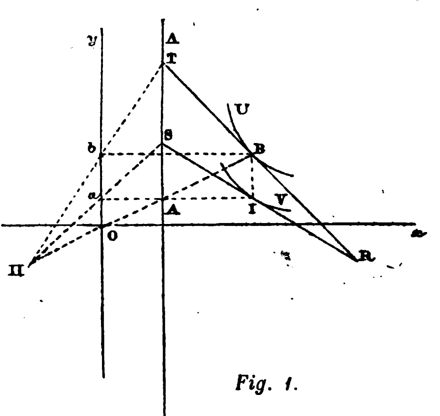


Fig. 1.

En particulier, lorsque la courbe U est un cercle tangent en O à Oy, la courbe V est une *courbe d'Agnesi ;* lorsque la courbe U est un cercle tangent en O à Ox, la courbe V est une *serpentine.*

Il s'agit de déduire la tangente à la courbe V au point I de la tangente à la courbe U au point B. M. de Longchamps, par l'introduction d'une courbe auxiliaire, a montré comment cette construction pouvait se ramener à d'autres, connues.

Nous nous proposons ici d'opérer cette construction *directement.* Outre la simplicité très grande du résultat, le problème ainsi traité présente l'intérêt de faire connaître une application nouvelle de formules très importantes de géométrie infinitésimale dont nous avons donné des démons-

(*) *Journal de Mathématiques spéciales,* septembre 1885, p. 199.

trations absolument élémentaires dans ce recueil même (*), et que nous avons eu depuis l'occasion d'utiliser également dans ce journal.

Soient TR la tangente en B à la courbe U, SR la tangente en I à la courbe V.

Représentons par $d(A)$, $d(B)$, $d(I)$ les déplacements infiniment petits simultanés des points A, B et I sur les tangentes Δ, TR, et SR, à leurs trajectoires Δ, U et V.

La droite AB touchant son enveloppe au point O (puisqu'elle pivote autour du point O) on a, en vertu de l'une des formules auxquelles nous venons de faire allusion, formule due à Newton,

$$\frac{d(A)}{d(I)} = \frac{OA \cdot AT}{OB \cdot BT}. \qquad (1)$$

Les droites BI et AI ayant chacune une direction constante, on a, d'après un cas particulier de la formule de Newton,

$$\frac{d(B)}{d(I)} = \frac{BR}{IR} = \frac{BT}{IS}, \qquad (2)$$

$$\frac{d(I)}{d(A)} = \frac{IS}{AS}. \qquad (3)$$

Multiplions (1), (2) et (3) membre à membre; il vient, après des réductions évidentes,

$$1 = \frac{OA \cdot AT}{OB \cdot AS}$$

ou

$$\frac{AT}{AS} = \frac{OB}{OA} = \frac{Ob}{Oa},$$

a et b étant les pieds des perpendiculaires respectivement abaissées de A et de B sur Oy. Cette dernière égalité montre que les droites OA, aS et bT concourent en un même point H. De là ce théorème :

B *et* I *étant deux points correspondants des courbes* U *et* V, b *et* a, *les projections de ces points sur* Oy, *soient* T *et* S *les points où les tangentes respectives en* B *et* I *aux courbes* U *et* V *coupent la droite* Δ. *Les droites* bT *et* aS *se coupent sur le rayon vecteur* OB.

Grâce à ce théorème on pourra, par une construction sur

(*) *Journal de mathématiques élémentaires*, 1880, p. 450. Article intitulé : *Principes élémentaires de géométrie cinématique.*

la simplicité de laquelle nous n'avons pas à insister, déduire la tangente IS de la tangente BT, ou *vice versâ*.

2. — Nous allons maintenant donner une application d'un autre théorème qui se démontre au moyen des *Principes élémentaires de géométrie cinématique*, déjà cités.

Nous savons, d'après M. de Longchamps (*), que le lieu de l'orthocentre du triangle déterminé par le centre d'un cercle et une corde de ce cercle passant par un point fixe est une cubique unicursale passant par les ombilics du plan. Voyons comment on peut déterminer la normale à cette courbe. ce qui est une manière d'obtenir la tangente dont M. de Longchamps a demandé la construction.

Soient O le centre du cercle, P le point autour duquel pivote la corde AB.

L'orthocentre I du triangle AOB est évidemment, comme l'a remarqué M. de Longchamps, symétrique du pôle K de AB, par rapport au point M où OK coupe AB.

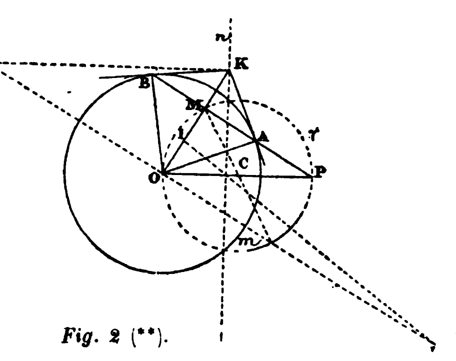


Fig. 2 (**).

Le point K décrit la polaire π du point B, c'est-à-dire une droite perpendiculaire à OP; le point M décrit le cercle γ qui a OP pour diamètre. La courbe Γ décrite par le point I est donc ce que nous avons appelé *la transformée par symétrie de la droite* π *par rapport au cercle* γ (***).

Élevons alors au point O une perpendiculaire à OM. Cette perpendiculaire coupe respectivement en i, en m et en k les

---

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885 p. 216, question 174.

(**) Cette figure présente une incorrection; il faut supposer que m est au milieu de ki.

(***) Voir notre note *sur les transformations centrales des courbes planes* dans *Mathesis* (t. IV, 1882, p. 74).

normales aux trajectoires des points I, M et K; en vertu de la remarque que nous avons faite dans *Mathesis*, les points i et k sont symétriques par rapport au point m.

Or, la normale à la trajectoire du point K, c'est la parallèle à OP menée par ce point; la normale à la trajectoire du point M, c'est la droite qui joint ce point au milieu C de OP. Donc:

Si la parallèle menée à AB *par le point* O *coupe en* k *la parallèle menée à* OP *par le point* K, *et en* m *la droite qui joint le point* M *au milieu de* OP, *la normale à la trajectoire du point* I *est la droite qui joint ce point au symétrique de* k *par rapport à* m.

On peut observer que le lieu du point m est le cercle décrit sur OP, comme diamètre, et celui du point k, une parabole de sommet O et d'axe OP ayant pour paramètre la demi-distance du point O à la droite π.

FORMULE D'ABEL, GÉNÉRALISATION DU BINOME

Par M. **Poujade.**

Posons

$$\varphi_m(a, x) = x^m + \frac{m}{1} a (x + h)^{m-1} \dots$$

$$+ \binom{m}{n} a (a - nh)^{n-1} (x + nh)^{m-n} \dots + a (a - mh)^{m-1} \text{ (*)}$$

Prenons la dérivée par rapport à a; en opérant sur le terme général et en réunissant les deux parties, nous avons

$$m\binom{m-1}{n-1} (a - h)(a - nh)^{n-2} (x + nh)^{m-n},$$

ce qui représente m fois le terme général de $\varphi_{m-1}(a - h, x + h)$;

(*) On sait que

$$\binom{m}{n} = \frac{n(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}.$$

Cette notation symbolique est due à Euler.

Le théorème en question a été démontré par Abel (*Journal de Crelle*, t. 1). On trouvera une autre démonstration de cette formule remarquable dans les *Exercices de Frenet*, p. 408. G. L.

donc

$$\frac{d\,\varphi_m(a, x)}{da} = m\,\varphi_{m-1}(a - h, \quad x + h).$$

Dès lors, si l'on a

$$\varphi_{m-1}(a, x) = (x + a)^{m-1} = \varphi_{m-1}(a - h, x + h), \qquad (1)$$

il vient

$$\varphi_m(a, x) = (x + a)^m + \text{K},$$

K désignant une constante indépendante de a; faisant $a = 0$, on trouve $\text{K} = 0$, et

$$\varphi_m(a, x) = (x + a)^m. \qquad (2)$$

Or l'égalité (1) a lieu pour $m = 2$; elle est donc générale et l'on a

$$(x + a)^m = x^m + \ldots + \binom{m}{n} a\,(a - nh)^{n-1}(x + nh)^{m-n} + \ldots. + a\,(a - mh)^{m-1}.$$

C. Q. F. D.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 249.)

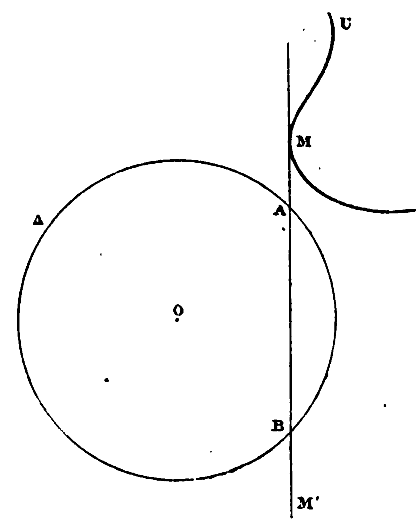
---

31. — La transformation que nous allons définir maintenant, appliquée au cas particulier que nous développons plus loin, va nous conduire à une quartique γ_4 qui nous paraît intéressante à plus d'un point de vue. Comme on va le voir, elle possède trois points doubles réels, trois axes de symétrie, et trois tangentes doubles réelles ; on la construit, point par point et tangente par tangente, par une construction des plus simples. Les quelques théorèmes que nous signalons sont ceux qui se présentent tout d'abord dans cette étude; mais nous pensons que, à l'exemple de l'hypocycloïde à trois rebroussements à laquelle elle se rattache si intimement et qui jouit de propriétés si remarquables, peu à peu découvertes, la courbe γ_4 possède de nombreuses et intéressantes propriétés que provoquera, nous l'espérons, une étude plus attentive de

cette courbe. Il est d'ailleurs très possible qu'elle ait été déjà rencontrée et, dans ce cas, ce que nous avons trouvé sur elle viendra peut-être s'ajouter aux travaux qu'elle a motivés.

32. — Quoi qu'il en soit, voici la transformation générale à laquelle nous avons fait allusion dans le paragraphe précédent.

Imaginons une courbe U et un cercle fixe Δ; U est la courbe que l'on veut transformer, Δ constitue la figure de référence. Menons à la courbe U une tangente qui rencontre Δ aux points A et B, puis prenons $BM' = MA$. A tout point M de U correspond un point M'; et le lieu du point M' est une certaine courbe V, transformée de U d'après la loi géométrique que nous venons d'indiquer.

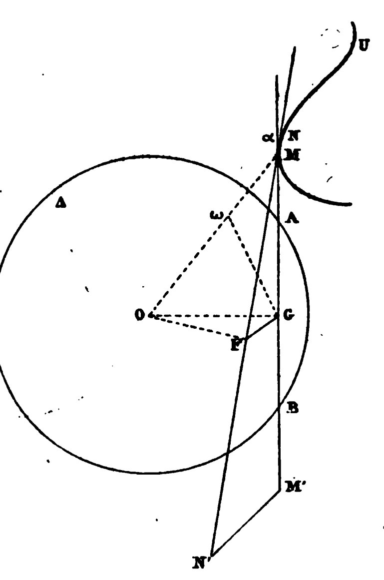


Prenons maintenant deux tangentes, infiniment voisines, à la courbe U et soient M' et N' les points correspondants sur V; il s'agit de déterminer la position limite de M'N'. Voici le principe connu, et dont nous donnons d'ailleurs un peu plus loin une démonstration qui permet de fixer cette position.

Dans un quadrilatère quelconque les quatre côtés, et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés, enveloppent une même parabole.

Si du point O, centre de Δ, on abaisse des perpendiculaires OG, OF sur MM' et NN', les points F et G sont placés aux milieux des segments MM', NN'; ainsi, les droites MM', NN', MN, M'N' et FG enveloppent une certaine parabole P et nous allons chercher ce que devient cette parabole quand la tangente NN' vient se confondre avec MM'. En désignant par α le

point de concours des tangentes MM′, NN′, le cercle circonscrit au triangle MαN passe par le foyer de P et a pour position limite un cercle bien déterminé, savoir, celui qui est décrit, sur la droite qui joint le point M au centre de courbure correspondant à ce point, comme diamètre. D'autre part, la droite FG devient, à la limite, une perpendiculaire à la droite Δ′ qui joint G au milieu ω de OM. En résumé, la parabole P a pour position limite une parabole P′ qui est déterminée par les conditions suivantes : 1° elle passe par M tangentiellement à MM′ ; 2° son foyer est situé sur le cercle δ qui passe par M, tangentiellement à MM′, et par le centre de courbure correspondant à M ; 3° elle est encore tangente à une droite Δ′, passant par G, perpendiculairement à Gω.



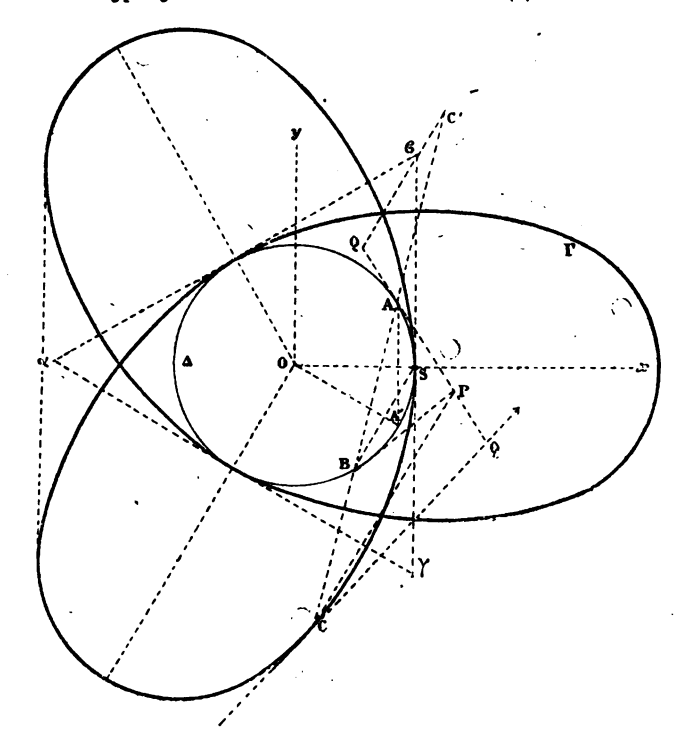
On voit que le foyer de P′ est à l'intersection de δ avec un cercle passant par M et par G tangentiellement à Δ′. Le foyer de P′ étant ainsi déterminé, on connaît la direction des diamètres et la tangente à V au point M′ s'obtient par diverses constructions connues, notamment par celle qui prend pour base le théorème de Poncelet.

Nous allons maintenant quitter ces généralités pour appliquer la précédente transformation au cas simple auquel nous avons fait allusion tout à l'heure.

33. — Soit un cercle Δ et, sur ce cercle, un point fixe S ; si l'on prend un point A, arbitrairement sur la circonférence, puis un point B, tel que l'on ait

$$\text{arc SB} = 2 \text{ fois arc SA},$$

en prolongeant BA d'une longueur égale à elle-même, on obtient le point C' dont le lieu géométrique est la courbe nommée *hypocycloïde à trois rebroussements* (*).



Si, au contraire, on prolonge AB jusqu'en C, de façon a avoir

$$BC = AB,$$

le lieu du point C est une courbe γ_4 dont nous allons indiquer quelques propriétés.

34. Théorème. — *La courbe γ_4 est une quartique unicursale; elle admet trois points doubles réels et trois axes de symétrie.*

Soient x', y' les coordonnées de A ; x'', y'' celles de B. Calculons d'abord celles-ci en fonction de x' et de y'.

(*) Voyez *Journal*, 1884, p. 169.

Si nous prenons le point A′ (x', $-y'$) symétrique de A par rapport à ox, la droite SB sera perpendiculaire sur oA′. Cette remarque permet de calculer x'' et y'', en fonction de x' et de y', et un calcul simple donne

$$x'' = 4(x'^2 - y'^2) = 8x'^2 - \frac{1}{4}, \qquad y'' = -8x'y'.$$

Dans ces formules, le rayon du cercle a été pris égal à $\frac{1}{4}$; valeur qui s'est présentée dans l'étude que nous avons faite de l'hypocycloïde à trois rebroussements *(loc. cit.)*.

En désignant par x, y les coordonnées de C, nous avons

$$x + x' = 2x'', \quad y + y' = 2y'',$$

et, par conséquent,

$$x = 16x'^2 - \frac{1}{2} - x', \quad y = -16x'y' - y'. \qquad (1)$$

Pour exprimer x et y au moyen d'un seul paramètre t, il suffit de considérer le cercle comme une courbe unicursale et, à cet effet, en désignant par t le coefficient angulaire de SA′, droite qui est parallèle à AB, on pose

$$-t = \frac{y'}{x' - \frac{1}{4}} = \frac{x' + \frac{1}{4}}{y'}.$$

De ces égalités on tire

$$4x' = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \text{et} \quad 2y' = \frac{t}{1 + t^2}.$$

D'après cela, les formules (1) donnent, finalement,

$$4x = \frac{t^4 - 12t^2 + 3}{(1 + t^2)^2}, \quad \text{et} \quad 2y = \frac{t\,(3 - 5t^2)}{(1 + t^2)^2}. \qquad (A)$$

35. Équation cartésienne de γ_4. — En cherchant l'équation cartésienne de cette courbe, en éliminant, par exemple, x' et y' entre les égalités (1) et la relation

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{16},$$

on trouve

$$(16x^2 + 16y^2 + 4x - 3)^2 = 4(3 - 16x)\left(y^2 - 3x^2 - x + \frac{3}{16}\right)$$

ou, après développement,

$$\overline{16}^2 y^4 + 4y^2(8.16x^2 + 48x - 27) + (4x - 1)(4x - 3)\left(4x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Si l'on veut rétablir la forme homogène, on divisera par $\overline{16}^2$ et en remplaçant $\frac{1}{4}$ par R, on a

$$y^4 + y^2\left(2x^2 + 3Rx - \frac{27}{4}R^2\right) + (x - R)(x - 3R)\left(x + \frac{3R}{2}\right)^2 = 0.$$

36. Équation polaire de γ_4. — L'équation de γ_4 en coordonnées polaires est, d'après cela,

$$\rho^4 + R\rho^3 \cos\omega(3\sin^2\omega - \cos^2\omega) - \frac{27}{4}R^2\rho + \frac{27}{4}R^4 = 0,$$

ou

$$\rho^4 - R\rho^3 \cos 3\omega - \frac{27}{4}R^2\rho^2 + \frac{27}{4}R^4 = 0. \qquad \text{(F)}$$

De cette équation on tire plusieurs conséquences.

En discutant la valeur de cos 3ω, qui doit être comprise entre $+1$ et -1, on est d'abord conduit aux deux inégalités :

$$(\rho - R)(\rho - 3R)\left(\rho + \frac{3}{2}\right)^2 < 0,$$

$$(\rho + R)(\rho + 3R)\left(\rho - \frac{3}{2}\right)^2 > 0.$$

Cette dernière est toujours vérifiée en supposant ρ positif; l'autre exige que ρ soit compris entre R et 3R; la courbe γ_4 est donc renfermée, tout entière, entre les deux cercles Δ, Δ', que nous appellerons le *cercle inscrit* et le *cercle circonscrit* à γ_4. Nous nommerons *point central* de γ_4 le centre commun à ces deux cercles; ce point est aussi le point de concours des axes de symétrie de γ_4.

En effet, on voit que ρ ne dépendant que de cos 3ω, l'axe ox et les droites qui, partant de l'origine, font des angles de 60° ou de 120° avec ox, sont des axes de symétrie de γ_4.

En faisant
$$\omega = 60^\circ,$$
on a
$$(\rho + R)(\rho + 3R\left(\rho - \frac{3}{2}\right)^2 = 0,$$
on aperçoit le point double situé sur le rayon vecteur considéré à une distance de l'origine égale à $\frac{3}{2}$. Les tangentes, à l'un des points doubles, sont inclinées sur l'axe correspondant d'un angle φ, donné par la formule
$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Ce dernier résultat s'obtient assez vite au moyen des formules (A). Ces formules donnent
$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(7t^2 - 9)}{(1 + t^2)^3}, \quad 2\frac{dy}{dt} = \frac{5t^4 - 24t^2 + 3}{(1 + t^2)^3}.$$

Le point double situé sur ox correspond à l'une ou l'autre des racines de l'équation
$$5t^2 = 3$$
et, pour ces valeurs, $\frac{dy}{dx}$ prend la valeur indiquée.

La tangente double qui est perpendiculaire à l'axe ox se détermine très facilement en écrivant que $\frac{dx}{dt}$ est nul, on a ainsi
$$7t^2 = 9,$$
et par suite
$$x = - R\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right).$$

La droite cherchée passe un peu à gauche du sommet α du triangle équilatéral obtenu en menant les tangentes aux points de contact de Γ avec son cercle inscrit.

De ces renseignements on déduit la forme générale de la courbe; proposons-nous maintenant de construire la tangente en un de ses points.

37. Tracé de la tangente à γ_4. — La construction que nous allons indiquer repose sur une remarque préliminaire que nous énonçons ainsi : *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on prend sur ses côtés*

$$PB = QP,$$
$$CR = RS,$$

les droites PR *et* QS *sont tangentes à une parabole inscrite au triangle et l'axe de cette parabole est parallèle à la transversale réciproque de* RP (ou à celle de QS) *par rapport au triangle* ABC.

En effet, si nous prenons $AR' = RC$ et $AP' = PB$, $R'P'$ est la transversale réciproque de PR ; celle de QS' est évidemment parallèle à $P'R'$, puisqu'on a

$$AS' = 2AR' \quad \text{et} \quad AQ' = 2AP'.$$

Mais on sait que, dans la transformation par transversales réciproques, au point qui est à l'infini dans une direction donnée correspond une parabole inscrite au triangle de référence et, en outre, que les diamètres de la parabole sont parallèles à la direction proposée.

Cela posé, si nous prenons sur le cercle Δ deux positions infiniment voisines, et si nous observons que la droite CC' est tangente en C' à l'hypocycloïde, nous pourrons dire que les tangentes en A et B au cercle Δ et la tangente cherchée enveloppent une certaine parabole Π passant par le point C', tangentiellement à CC'.

Si nous transformons par transversales réciproques cette parabole Π, par rapport au triangle PAB : 1° à la tangente ABC' correspond la droite PC ; 2° à Π correspond un point à l'infini dans la direction PC. D'après cela, si nous menons $C'Q$ parallèlement à PC et si nous prenons $PQ' = QA$, la droite CQ', transversale réciproque de $C'Q$, est tangente à Π. Concluons donc que CQ' est la tangente en C à la courbe Γ.

Enfin, pour terminer ce que nous voulons signaler sur γ_4, voici deux propriétés qui résultent encore immédiatement de son équation polaire.

38. Théorème. — *Les transversales menées à γ_4 par son point central, coupent la courbe en quatre points réels, tels que le produit de leurs distances au point central est constant.*

En effet, l'équation (F) prouve que, quel que soit ω, le produit des racines de cette équation en ρ est constant.

39. Théorème. — *Si l'on coupe Γ par un cercle concen-*

trique au point central, on obtient six points qui, joints de deux en deux, donnent deux triangles équilatéraux.

En effet, l'équation (F), lorsqu'on suppose que ρ est donné, fait connaître la valeur de $\cos 3\omega$. Si l'on désigne par 3α le plus petit arc positif qui correspond à ce cosinus, on aura

$$3\omega = 3\alpha + 2k\pi,$$

ou

$$3\omega = 2k\pi - 3\alpha.$$

La première égalité donne trois points ayant pour coordonnées polaires

$$(\rho, \alpha); \quad (\rho, \alpha + 120^\circ); \quad (\rho, \alpha + 240^\circ).$$

Ces points forment donc un triangle équilatéral. La deuxième égalité fait connaître les sommets de l'autre triangle équilatéral dont fait mention l'énoncé.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

38. — *Soit* f (x) = o *une équation du troisième degré;* a, b, c *désignant ses trois racines, on propose de former l'équation dont les racines sont*

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{a}, \quad \frac{ca}{b}.$$

Posons $y = \frac{bc}{a}$ et cherchons, d'après cette formule, l'équation transformée.

La formule de transformation peut s'écrire

$$y = \frac{abc}{a^2},$$

ou

$$y = \frac{-r}{x^2}, \qquad (1)$$

x représentant une racine quelconque de l'équation donnée

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$x = r\,\frac{p - y}{qy - r}.$$

On trouve, après calcul,

$$ry^3 + (q^2 - 2pr)\,y^2 + r\,(p^2 - 2q)\,y + r^2 = 0.$$

Remarque. — On arrive aussi à ce résultat, et même un peu plus rapidement, en calculant les fonctions symétriques:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}; \quad a^2 + b^2 + c^2.$$

39. — *Discuter les surfaces qui correspondent à l'équation*

$$ayz + bzx + cxy + d = 0.$$

On supposera d'abord $abc \neq 0$. En considérant une génératrice Ox du cône asymptote ($y = 0$, $z = 0$) et en cherchant à placer sur la surface proposée une droite parallèle à Ox ($y = \lambda$, $z = \mu$), on trouve que ce dernier problème est possible ou impossible suivant que $abcd$ est positif ou négatif.

La surface est un hyperboloïde à deux nappes, quand on a $abcd > 0$; un hyperboloïde à une nappe, dans le cas contraire.

Enfin, si l'on suppose $abc = 0$, l'équation représente un cylindre hyperbolique.

C'est ainsi que l'on vérifie immédiatement que l'équation

$$\frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0$$

représente un hyperboloïde à deux nappes.

Remarque. — Prenons maintenant l'équation plus générale

$$ayz + bzx + cxy + mx + ny + pz + d = 0,$$

et appliquons-lui le même procédé. On vérifie facilement le tableau suivant

$abc \neq 0$	$H > 0$	*Hyperboloïde à une nappe.*
	$H < 0$	*Hyperboloïde à deux nappes.*
	$H = 0$	*Cône.*
$a = 0$, $bc \neq 0$	$H \neq 0$	*Paraboloïde hyperbolique.*
	$H = 0$	*Cylindre hyperbolique.*
$a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$	$p \neq 0$	*Paraboloïde hyperbolique.*
	$p = 0$	*Cylindre hyperbolique.*

Dans ce tableau, H désigne le Hessien de la forme qui con-

stitue le premier membre de l'équation proposée. On a ici $16\,H = a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2 - 2bcnp - 2acmp - 2abmn + 4abcd.$

Il va sans dire que ces résultats peuvent être obtenus par les autres méthodes connues, mais la précédente est particulièrement recommandable quand on aperçoit une génératrice réelle du cône asymptote. *(A suivre.)*

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (1885)

ADMISSIBILITÉ

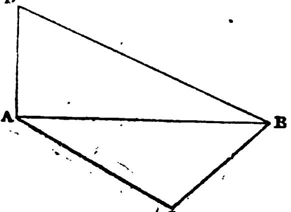
Mathématiques (4 heures). — Construire la courbe représentée par l'équation :

$$(y - x + 1)(y + x + 1)(x - y + 1) = 1.$$

On exposera clairement la méthode employée pour construire un point de la courbe et la tangente en ce point. (3 juillet 1885.)

ADMISSION

Mathématiques. — On donne une parabole $y^2 = 2px$. Trouver le lieu des points tels que le cercle passant par les points de contact des tangentes issues de ce point et par le sommet de la parabole ait un rayon constant R.



Trigonométrie. — Dans le quadrilatère DACB on donne : AC = 251,328 ; CB = 219,912 ; BD = 1061,85976 ; BAC = 27° 47′ 44″,77 ; DBA = 67° 22′ 48″48 et DAB = 90°.

Calculer les autres éléments et la surface. (3 août 1885.)

CONCOURS SUPPLÉMENTAIRE D'OCTOBRE

On a un triangle rectangle ABC et l'on considère les hyperboles équilatères circonscrites. Du sommet de l'angle droit on mène des normales à ces coniques Trouver le lieu des pieds de ces normales.

QUESTION 77

Solution par M. Vèzes, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux.

Étant donnée une ellipse, on décrit, de l'un des foyers comme centre, de F *par exemple, une circonférence de rayon égal à l'ordonnée de ce point. Au point* F *correspond une directrice* KK′.

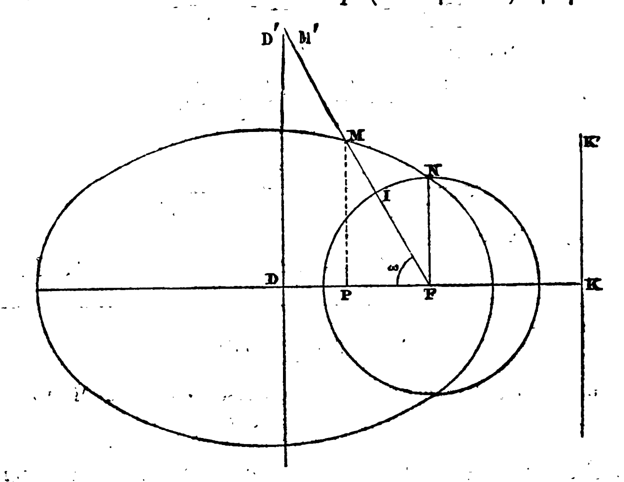
On prend la droite DD′ *symétrique de la directrice par rapport à* F, *et on mène du point* F *le rayon vecteur* FIMM′, *rencontrant le cercle, l'ellipse et la droite* DD′ *respectivement aux points* I, M *et* M′. *Prouver que* IM . IM′ = p², p *étant l'ordonnée du foyer.* (X. Antomari.)

On a

$$\mathrm{IM} \,.\, \mathrm{IM} = (\mathrm{FM} - p)(\mathrm{FM'} - p),$$

ou

$$\mathrm{IM} \,.\, \mathrm{IM'} = \mathrm{FM} \,.\, \mathrm{FM'} - p\,(\mathrm{FM} + \mathrm{FM'}) + p^2.$$



Or les triangles semblables FM′D, FMP donnent

$$\frac{\mathrm{FM'}}{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{FP}},$$

d'où

$$\mathrm{IM} \,.\, \mathrm{IM'} = \overline{\mathrm{FM}}^2 \,.\, \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{FP}} - p \,.\, \mathrm{FM}\left(1 + \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{FP}}\right) + p^2;$$

ou, en observant que FP + FD = PK,

$$\mathrm{IM} \,.\, \mathrm{IM'} = \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FP}}\left(\mathrm{FMFD} - p \,.\, \mathrm{PK}\right) + p^2.$$

D'autre part, en écrivant que les rapports des distances des points M et N au foyer et à la directrice sont égaux, on a encore

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{PK}} = \frac{p}{\mathrm{FK}};$$

et, comme $FK = FD$, il vient

$$FM \cdot FD - p \cdot PK = 0.$$

Cette égalité prouve que

$$IM \cdot IM' = p^2.$$

NOTA. — Si l'on observe que

$$\frac{1}{FM} = \frac{1 - e\cos\omega}{p} = \frac{a - c\cos\omega}{b^2}$$

et que

$$\frac{1}{FM'} = \frac{\cos\omega}{FD} = \frac{c\cos\omega}{b^2},$$

on a immédiatement

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{p},$$

ou

$$\frac{1}{MI + p} + \frac{1}{M'I + p} = \frac{1}{p}.$$

Cette égalité donne finalement

$$IM \cdot IM' = p^2.$$ G. L.

QUESTION 103

Solution par M. J. RAT, élève au Lycée de Marseille (classe de M. Amigues).

Lieu des sommets des paraboloïdes qui passent par une parabole donnée et par deux points donnés symétriques par rapport au plan de la parabole. On distinguera les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques et celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques. (E. Amigues.)

Prenons pour axe des x l'axe des y et la tangente au sommet de la parabole, et pour axe des z la perpendiculaire menée par l'origine au plan de la parabole.

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole. L'équation générale des surfaces du second ordre qui passent par cette parabole est

$$y^2 - 2px + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Si on exprime que cette équation représente des paraboloïdes, on a la condition

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0,$$

d'où on tire

$$a = 0.$$

L'équation générale des paraboloïdes qui passent par la parabole donnée, est donc

$$y^2 - 2px + z(by + cz + d) = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un des points par où doivent passer ces paraboloïdes. Les coordonnées de l'autre point, symétrique du premier par rapport au plan de la parabole, seront x_0, y_0, $-z_0$. Si on exprime que les paraboloïdes précédents passent par ces deux points, on trouve les deux conditions

$$y_0^2 - 2px_0 + z_0(by_0 + cz_0 + d) = 0$$

et

$$y_0^2 - 2px_0 - z_0(by_0 - cz_0 + d) = 0$$

d'où on tire

$$d = -by_0,$$

et

$$c = \frac{-(y_0^2 - 2px_0)}{z_0^2}.$$

L'équation générale des paraboloïdes considérés est donc

$$y^2 - 2px + z\left[b(y - y_0) - \frac{(y_0^2 - 2px_0)z}{z_0^2}\right] = 0,$$

ou bien en posant

$$\frac{-b}{y^2 - 2px_0} = \lambda,$$

λ étant un paramètre variable :

$$z_0^2(y^2 - 2px) - (y_0^2 - 2px_0)z[\lambda(y - y_0) + z] = 0.$$

L'axe de chacun de ces paraboloïdes est parallèle à l'axe des x, puisque dans un paraboloïde toutes les paraboles de section ont leurs axes parallèles à l'axe du paraboloïde.

Soient α, β, γ les coordonnées du sommet d'un de nos

paraboloïdes; les équations de l'axe de ce paraboloïde seront donc

$$\frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z-\gamma}{0}.$$

Pour que cette droite soit l'axe du paraboloïde, il faut et il suffit que le plan tangent à la surface au point (α, β, γ) soit perpendiculaire à la droite. Le plan tangent à la surface au point (α, β, γ) a pour équation

$$2pz_0^2x+[\lambda\gamma(y_0^2-2px_0)-2\beta z_0^2]y$$
$$+(y_0^2-2px_0)[\lambda(\beta-y_0)$$
$$+2\gamma]z+\ldots=0.$$

Si on exprime que ce plan est perpendiculaire à la droite précédente, on a les relations

$$\lambda\gamma(y_0^2-2px_0)-2\beta z_0^2=0 \qquad (1)$$

et

$$\lambda(\beta-y_0)+2\gamma=0.$$

D'autre part, si on exprime que le point (α, β, γ) est sur le paraboloïde, on a

$$z_0^2(\beta^2-2p\alpha)-(y_0^2-2px_0)\gamma[\lambda(\beta-y_0)+\gamma]=0.$$

On obtiendra donc le lieu du sommet α, β, γ, en éliminant le paramètre variable λ entre les équations (1), (2) et (3), ce qui donne comme lieu la courbe, intersection des deux surfaces du second degré :

$$z_0^2(y^2-2px)+(y_0^2-2px_0)z^2=0,$$

et

$$(y_0^2-2px_0)z^2+y(y-y_0)z_0^2=0.$$

Si on élimine z entre ces deux équations, on a l'équation de la projection du lieu sur le plan des xy :

$$yy_0-2px=0.$$

Cette projection étant une droite, il s'ensuit que la courbe qui constitue le lieu est une conique, intersection du cylindre

$$(y_0^2-2px_0)z^2+y(y-y_0)z_0^2=0,$$

avec un plan perpendiculaire au plan des xy :

$$yy_0-2px=0.$$

Pour étudier la nature de cette conique, il suffit d'étudier celle de sa projection sur le plan des yz, laquelle a pour équation

$$(y_0^2-2px_0)z^2+y(y-y_0)z_0^2=0.$$

Supposons d'abord que l'on ait

$$y_0^2 - 2px_0 > 0,$$

c'est-à-dire que la projection commune sur le plan des xy des deux points fixes, par lesquels passent tous les paraboloïdes de la question, soit en dehors de la parabole $y^2 - 2px = 0$. Alors la projection du lieu et, par suite, la conique elle-même sera une ellipse. Le centre de l'ellipse de projection est situé sur Oy et à une distance de l'origine O égale à $+\frac{y_0}{2}$. L'ellipse a d'ailleurs ses axes parallèles aux axes des coordonnées, et elle est tangente à l'axe des z, à l'origine.

Supposons maintenant que l'on ait

$$y_0^2 - 2px_0 < 0,$$

c'est-à-dire que la projection commune sur le plan des xy des deux points fixes, par lesquels passent les paraboloïdes, soit à l'intérieur de la parabole $y^2 - 2px = 0$. Alors la conique du lieu est une hyperbole. Les principaux éléments de la projection de cette conique sur le plan des yz, projection qui est une hyperbole, sont disposés d'une manière analogue à ceux de l'ellipse précédente. Les sommets réels de cette hyperbole sont situés sur l'axe des y; l'un est à l'origine, l'autre A est à une distance de l'origine égale à $+y_0$.

Les paraboloïdes considérés seront elliptiques, si les plans directeurs sont imaginaires; hyperboliques, si les plans directeurs sont réels. La condition de réalité des plans directeurs est

$$(y_0^2 - 2px_0)[\lambda^2(y_0^2 - 2px_0) + 4z_0^2] > 0.$$

Supposons qu'on ait $y_0^2 - 2px_0 > 0$. Alors les plans directeurs sont toujours réels, et les paraboloïdes considérés sont des paraboloïdes hyperboliques.

Supposons, en second lieu, qu'on ait $y_0^2 - 2px_0 < 0$. Alors les plans directeurs seront réels, si l'on a

$$\lambda^2(y_0^2 - 2px_0) + 4z_0^2 < 0;$$

imaginaires, dans le cas contraire.

Si on tire la valeur de λ, donnée par l'équation (2),

$$\lambda = \frac{-2\gamma}{(\beta - y_0)},$$

et si on substitue dans l'équation précédente, on a en remplaçant β et γ par y et z, la surface

$$(y_0^2 - 2px_0) + z_0^2(y - y_0)^2 = 0.$$

Elle se compose de deux plans perpendiculaires au plan des yz, qui séparent les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques de celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques. Les traces des deux plans précédents sur le plan des yz se composent des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, projection du lieu, menées par le sommet A de l'hyperbole. Si le point (x, y) est à l'origine, la quantité $(y_0^2 - 2px_0)z^2 + z_0^2(y - y_0)^2$ est positive. Par suite, toute la branche de l'hyperbole, qui est située dans la région de l'origine par rapport aux droites séparatrices, correspond à des paraboloïdes elliptiques. On voit de même que l'autre branche correspond à des paraboloïdes hyperboliques.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Marchis, à Rouen.

QUESTION 107

Solution par M. TISSIER, à Poitiers.

On sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est un cercle; démontrer que ce cercle est conjugué par rapport au triangle.

Prenons deux côtés du triangle comme axes des x et des y ; soient a et b les grandeurs de ces côtés et θ l'angle qu'ils comprennent.

L'équation générale des coniques inscrites dans ce triangle est

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2(bx + ay - ab)^2 - 2ABxy - 2C(By + Ax)(bx + ay - ab) = 0,$$

ou bien

$$M^2x^2 + 2P^2xy + N^2y^2 + 2Cab(Mx + Ny) + C^2a^2b^2 = 0,$$

en posant

$$M = A - Cb,\ N = B - Ca,\ P^2 = C^2ab - C(Aa + Bb) - AB.$$

La condition pour que l'hyperbole soit équilatère est

$$M^2 + N^2 - 2P^2 \cos\theta = 0. \qquad (1)$$

Les équations du centre sont

$$\left.\begin{array}{l} M^2x + P^2y + MCab = 0 \\ N^2y + P^2x + NCab = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Et en portant dans l'expression de P^2 les expressions de A et B en fonction de M, N, C on a

$$P^2 + MN + 2\,[C^2ab + C(Ma + Nb)] = 0. \qquad (3)$$

Les quatre équations (1), (2), (3) sont homogènes et du second degré par rapport aux paramètres M, N, P et C; en les éliminant on aura l'équation du lieu.

Les équations (2) donnent immédiatement par élimination de C

$$(M^2x + P^2y)N = (N^2y + P^2x)M,$$

d'où

$$Mx - Ny = 0.$$

Posons

$$\frac{M}{y} = \frac{N}{x} = \lambda.$$

On en tire

$$M = \lambda y, \quad N = \gamma x.$$

Multiplions les équations du centre respectivement par y et x et ajoutons membre à membre; on aura, en remplaçant $M^2 + N^2$ par $2P^2 \cos\theta$,

$$P^2(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + Cab(My + Nx) = 0. \qquad (4)$$

Remplaçons dans (1), (3) et (4) M et N et fonction de λ, on aura les trois équations :

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - 2P^2\cos\theta = 0, \qquad (1)'$$

$$P^2 + \lambda^2xy + 2[C^2ab + \lambda C(bx + ay)] = 0, \qquad (3)'$$

$$P^2(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + \lambda\, Cab(x^2 + y^2) = 0. \qquad (4)'$$

En tirant de (1)'

$$P^2 = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{2\cos\theta}$$

et portant dans les deux autres elles deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta) + 4\cos\theta\,[C^2ab + \lambda\, C(bx + ay)] = 0, \\ \dfrac{\lambda}{C} = -\dfrac{2ab\cos\theta}{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}. \end{array}\right.$$

En remplaçant λ et C par les quantités proportionnelles

dans la première équation, on effectuera l'élimination; on a ainsi l'équation

$$x^2 + 2xy \cos\theta + y^2 + [ab - 2(bx + ay)] \cos\theta = 0$$

qui représente un cercle.

Il est facile de voir que ce cercle est conjugué par rapport au triangle; en effet, multiplions par ab les deux membres, on peut écrire cette équation :

$$ab(x^2 + 2xy \cos\theta + y^2) + (bx + ay - ab)^2 \cos\theta$$
$$-(bx + ay)^2 \cos\theta = 0,$$

ou bien

$$b(a - b\cos\theta)x^2 + a(b - a\cos\theta)\, y^2$$
$$+ (bx + ay - ab)^2 \cos\theta = 0.$$

Ce qui est l'équation d'un cercle conjugué par rapport au triangle dont les trois côtés ont pour équation

$$x = 0, \quad y = 0, \quad bx + ay - ab = 0.$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Michelin, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

184. — Résoudre le système suivant :

$$yz - u^2 = a, \qquad vw - xu = d,$$
$$zx - v^2 = b, \qquad wu - vy = e,$$
$$xy - w^2 = c, \qquad uv - wz = f;$$

dans lequel x, y, z, u, v, w sont des inconnues et a, b, c, d, e, f des quantités données. *(W.)*

185. — On considère un triangle équilatéral de côté a et la courbe γ_1 qui correspond à l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \pm \frac{1}{\sqrt{y}} \pm \frac{1}{\sqrt{a - x - y}} = 0,$$

les axes de coordonnées étant deux côtés du triangle considéré :

1° Construire la courbe qui correspond à cette équation;

2° Par l'origine O, on mène une transversale qui rencontre γ_1, abstraction faite de l'origine, en deux autres points M, N; on prend le point I conjugué harmonique de O par rapport au segment MN. Trouver le lieu décrit par I; ce lieu est une cubique. *(G. L.)*

186. — Soit un triangle ABC.

Démontrer que l'on peut faire passer une hyperbole équilatère par les points suivants : A, B, C, H (centre du cercle circonscrit), H' (point de concours des hauteurs), K (centre des médianes antiparallèles), M' (point de concours des droites qui joignent les sommets aux centres des cercles circonscrits aux triangles ABH, ACH, BCH). Trouver le centre de cette hyperbole, les asymptotes, le paramètre. *(Boubals)*.

ERRATA. — Page 13, ligne 2 de la note, au lieu de (Υ), lisez (Γ).

Page 23, ligne 8 de la question 167, au lieu de *démontre que*, lisez démontrer que.

Page 23, ligne 2 de la question 168, au lieude *comme à*, lisez «commune à».

Page 107, ligne 7, en remontant, au lieu de menée *sur* le point E, lisez « par ».

Page 114, lignes 8 et 9, en remontant, au lieu de

$$\frac{(t+1)^m+(t-1)^m}{2},$$

$$\frac{(t+1_m)+(t-1)^m}{2t};$$

lisez

$$\frac{(t+1)^m+(1-t)^m}{2}$$

$$\frac{(t+1)^m-(1-t)^m}{2t}.$$

Page 187; ligne 1, au lieu de

$$\frac{mx+n}{x_2+1}.$$

lisez

$$\frac{mx+n}{x^2+1}.$$

N. B. — D'autres errata ont été signalés pp. 120, 172, 191, 240.

Questions proposées en 1882 et non résolues : n°s 11, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 33 et 38.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26860-3.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS